Ю.А.Глазков, Е.А.Зудина
(Москва)

I вариант

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1–А10 и В1–В3) базового уровня по материалу курса математики. К каждому заданию А1–А10 приведены 4 варианта ответа, из которых **только один верный**. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1–В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4–В11, С1, С2) по материалу курса математики. К заданиям В4–В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два – алгебраических (С3, С5) и одно – геометрическое (С4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Часть 1

При выполнении заданий* А1–А10 *в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $x^{1,5} : x^{-0,3}$.

1) $x^{-4,5}$ 2) $x^{1,2}$ 3) $x^{1,8}$ 4) x^{-5}

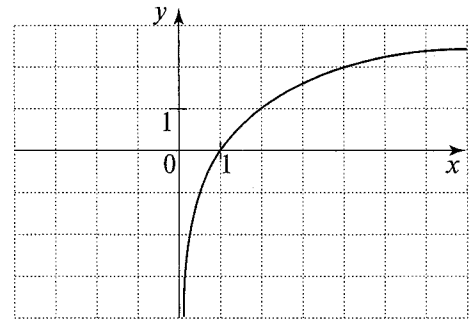
А2. Вычислите $\sqrt[3]{72} \cdot \sqrt[3]{3}$.

1) 6 2) 24 3) 36 4) 27

А3. Вычислите $4 - 2^{\log_2 6}$.

1) 4 2) 2 3) 3 4) –2

А4. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.



1) $y = 2^x$ 2) $y = \log_2 x$ 3) $y = 0{,}5^x$ 4) $y = \log_{0,5} x$

А5. Найдите производную функции

$$h(x) = 4x^2 - \sin x.$$

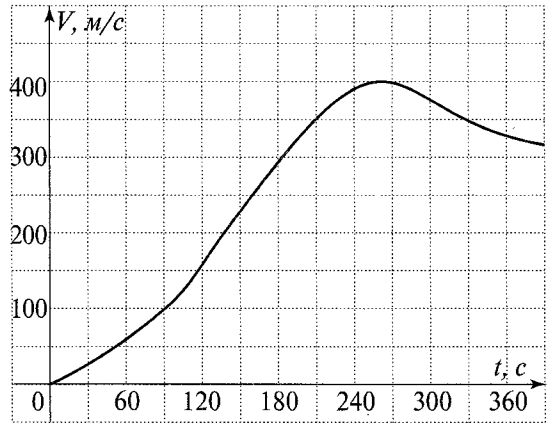
1) $h'(x) = 4x - \cos x$ 2) $h'(x) = 4x + \cos x$
3) $h'(x) = 8x - \cos x$ 4) $h'(x) = 8x + \cos x$

А6. Найдите множество значений функции

$$y = 2\log_5 x.$$

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $(-\infty; 2]$ 3) $[2; +\infty)$ 4) $(2; +\infty)$

А7. Скорость распространения звука в воздухе равна 340 м/с. Современные самолеты-истребители летают значительно быстрее. Определите по графику, сколько секунд самолет летел со сверхзвуковой скоростью 350 м/с и более. (На оси абсцисс отмечено время полета в секундах, на оси ординат – скорость в метрах в секунду).



1) 210 2) 120 3) 150 4) 180

А8. Решите неравенство $\dfrac{3x+12}{7x} \geq 0$.

1) $[-4; 0)$ 2) $(-4; 0]$
3) $(-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$ 4) $(-\infty; -4) \cup [0; +\infty)$

A9. Решите уравнение $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

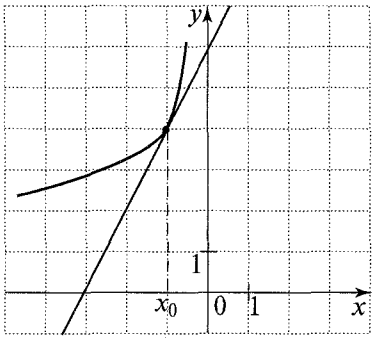
3) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ 4) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

A10. Решите неравенство $3^{2x-5} < 9$.
1) $(-\infty; -1{,}5]$ 2) $(-\infty; 3{,}5)$
3) $(3{,}5; +\infty)$ 4) $(-1{,}5; +\infty)$

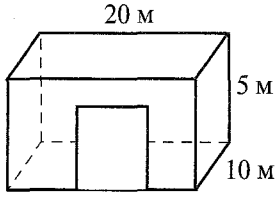
Ответом на задания* B1–B11 *должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

B2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



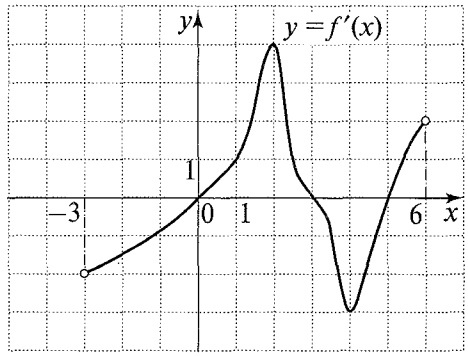
B3. Для отделки внешних стен склада (см. рисунок) нужно приобрести краску. Ширина ворот равна 3 м, высота – 4 м. Средний расход краски – 100 г на 1 квадратный метр поверхности. Цена банки, содержащей 10 кг краски, равна 400 руб. На какую сумму надо купить краски (ворота красить не надо)?



Часть 2

B4. Решите уравнение $4^x - 3{,}5 \cdot 2^{x+1} - 8 = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.)

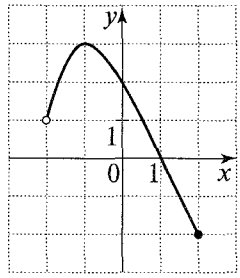
B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-3; 6)$.



B6. Вычислите значение выражения

$$\frac{\log_7 36}{\log_7 6} - \log_{49}\sqrt{7}.$$

B7. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На рисунке изображен график этой функции при $-2 < x \le 2$. Найдите значение выражения $(f(7) + 2f(-4)) \cdot f(-10)$.



B8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x| - 3 + a| = 4$ имеет ровно 3 корня.

B9. Для приготовления маринада необходим 2%-ый раствор уксуса. Сколько нужно добавить воды в 100 г 9%-го раствора уксуса, чтобы получить раствор для маринада?

B10. Через точку A окружности основания цилиндра проведены образующая AA_1 и прямая, пересекающая окружность другого основания в точке C. Радиус цилиндра равен 13, $AA_1 = 7$, $AC = 25$. Найдите расстояние между прямой AC и осью цилиндра.

B11. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны 9 и 16 соответственно. Найдите площадь трапеции.

Для записи ответов на задания* C1 *и* C2 *используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем – решение.

C1. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{-3x}{x^2+9}$$

при $|2x - 6{,}5| \le 3{,}5$.

C2. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x} \quad \text{и} \quad \frac{\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$$

принимают равные значения.

Часть 3

Для записи ответов на задания* C3–C5 *используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем – обоснованное решение.

C3. Найдите все значения $x > 3$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел

$$a = \log_3 x + 5\log_x 27 - 1 \quad \text{и} \quad b=23-\log_3^2 x$$

не меньше 7.

C4. Около правильной пирамиды $PABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM : MB = 1 : 3$. На ребре AP отмечена точка K так, что тангенс угла между плоскостями ABC и KBC равен 0,5. Объем пирамиды $KBCM$ равен $6\sqrt{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $PABC$.

C5. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$(0{,}5 - 1{,}75p)\cdot 0{,}04^{-|x|} + (0{,}15p - 0{,}5)\cdot 25^{0{,}5|x|+0{,}5} + p + 3 = 0$$

имеет ровно $p^2 + 2p + 4$ различных корней.

II вариант

Часть 1

При выполнении заданий* A1–A10 *в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1. Упростите выражение $b^{2,8}\cdot b^{-0,4}$.

1) $b^{3,2}$ 2) $b^{2,4}$ 3) b^{-7} 4) $b^{-1,12}$

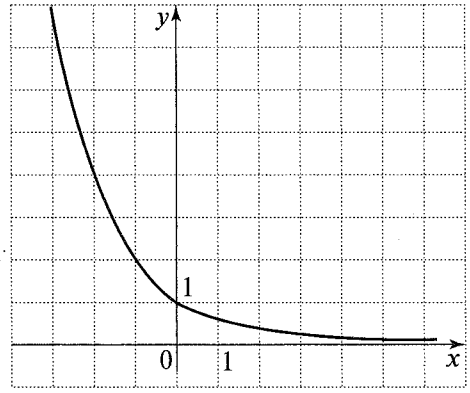
A2. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$.

1) 6 2) 2 3) 3 4) 27

A3. Вычислите $\log_7(49^7)$.

A4. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.

1) $y = 2^x$ 2) $y = \log_2 x$ 3) $y = 0{,}5^x$ 4) $y = \log_{0,5} x$



A5. Найдите производную функции

$$h(x) = x^2 + \cos x.$$

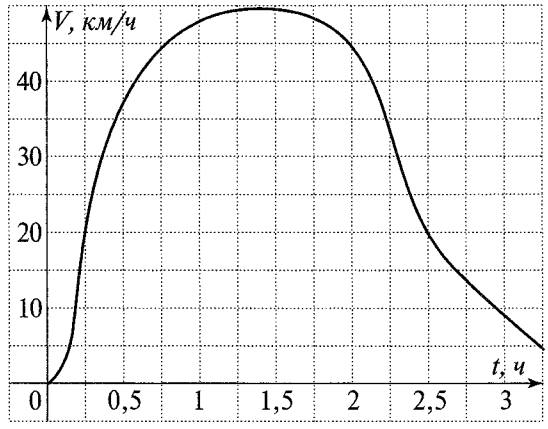
1) $h'(x) = 2x + \sin x$ 2) $h'(x) = x + \sin x$
3) $h'(x) = x - \sin x$ 4) $h'(x) = 2x - \sin x$

A6. Найдите множество значений функции

$$y = 2 + 2^x.$$

1) $(2; +\infty)$ 2) $[2; +\infty)$ 3) $[0; +\infty)$ 4) $(0; +\infty)$

A7. Судно «Метеор» на подводных крыльях может плыть со скоростью 60 км/ч. При скорости 20 км/ч корпус судна поднимается над поверхностью воды и оно движется, опираясь на подводные крылья. Определите по графику, сколько часов корабль плыл на подводных крыльях. (На оси абсцисс отмечено время движения в часах, на оси ординат – скорость в километрах в час.)



1) 2,75 2) 2,5 3) 3 4) 2,25

A8. Решите неравенство $\frac{5x}{6x-12} \le 0$.

1) (0; 2] 2) [0; 2)
3) $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$ 4) $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$

A9. Решите уравнение $2 + 2\sin x = 0$.

1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ 4) $-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

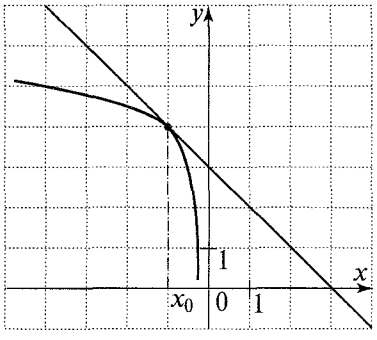
A10. Решите неравенство $7^{5x-4} > 49$.

1) $(-\infty; 1{,}2)$ 2) $(-\infty; -0{,}4)$
3) $(-0{,}4; +\infty)$ 4) $(1{,}2; +\infty)$

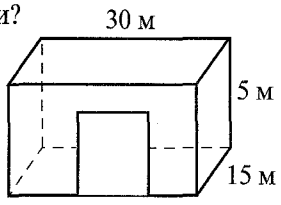
Ответом на задания* B1–B11 *должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Найдите $\operatorname{tg}\beta$, если $\cos\beta = -0{,}8$, и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

B2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



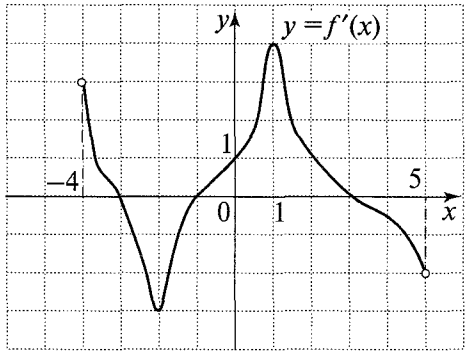
B3. Чтобы оштукатурить внешние стены склада (см. рисунок) нужен алебастр. Ширина ворот равна 4 м, высота – 4 м. Средний расход алебастра – 8 кг на 1 квадратный метр поверхности. Цена мешка, содержащего 20 кг алебастра, равна 600 руб. На какую сумму надо купить алебастра, чтобы стены оштукатурить полностью, от земли до крыши?



Часть 2

B4. Решите уравнение $9^x - 36 \cdot 3^{x-1} + 27 = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их сумму.)

B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-4; 5)$.



B6. Вычислите значение выражения

$$9^{\log_3 5} - \frac{\log_3 25}{\log_3 5}.$$

B7. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. При $-2 < x \le 1$ она задается формулой $y = -x^2 - 2x + 2$. Найдите значение выражения

$$\frac{f(-4) - 2f(-11)}{f(7)}.$$

B8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x| - 4 + a| = 3$ имеет ровно 1 корень.

B9. Сплавили 2 кг сплава цинка и меди, содержащего 20% цинка, и 6 кг сплава цинка и меди, содержащего 40% цинка. Найдите процентную концентрацию меди в получившемся сплаве.

B10. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π. Хорда его основания стягивает дугу в 60°. Через хорду проходит секущая плоскость, параллельная оси цилиндра. Найдите площадь сечения.

B11. В трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $BD \perp AB$, отрезок BH – высота, $AH = 4$, $HD = 9$. Найдите площадь трапеции.

Для записи ответов на задания* C1 *и* C2 *используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем – решение.

C1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+12}$$

при $|x + 7| \le 2$.

C2. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$$\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin 2x} \text{ и } \frac{\sin 2x-1}{\sin 2x}$$

принимают равные значения.

Часть 3

Для записи ответов на задания* C3–C5 *используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем – обоснованное решение.

C3. Найдите все значения $x < 1$, при каждом из которых наименьшее из двух чисел

$$a = \log_4 x + 4\log_x 4 + 8 \text{ и } b = 11 - 2\log_4^2 x$$

меньше 3.

C4. Около правильной пирамиды $PABC$ описана сфера. Радиус сферы равен 6, а центр принадлежит плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM : MB = 1 : 2$. На ребре AP отмечена точка K так, что тангенс угла между плоскостями ABC и KBC равен 0,2. Найдите объем пирамиды $KBCM$.

C5. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$(4p-1)\cdot\left(11\frac{1}{9}\right)^{-x} - (3p+7)\cdot 0{,}027^{\frac{x}{3}} + 13 - 6p = 0$$

имеет ровно $p^2 - 4p + 5$ различных корней.

Ответы

I вариант

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
A1	3	**A6**	1
A2	1	**A7**	2
A3	4	**A8**	3
A4	2	**A9**	4
A5	3	**A10**	2

№ задания	Ответ
B1	0,75
B2	2
B3	1200
B4	3
B5	3
B6	1,75
B7	–14
B8	–1
B9	350
B10	5
B11	49

№ задания	Ответ
C1	–0,4
C2	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
C3	$3 < x \le 81,\ x \ge 243$
C4	4
C5	0

II вариант

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
A1	2	**A6**	1
A2	3	**A7**	4
A3	1	**A8**	2
A4	3	**A9**	3
A5	4	**A10**	4

№ задания	Ответ
B1	–0,75
B2	–1
B3	104400
B4	3
B5	–1
B6	23
B7	–5
B8	7
B9	65
B10	20
B11	54

№ задания	Ответ
C1	$-\frac{1}{12}$
C2	$\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
C3	$0<x<\frac{1}{16},\ \frac{1}{4}<x<1$
C4	$9\sqrt{3}$
C5	1

Решения и критерии оценки заданий I варианта

A1. Ответ: 3*.

Решение. Используя свойство показателей степеней частного, получаем:

$$x^{1,5} : x^{-0,3} = x^{1,5-(-0,3)} = x^{1,8}.$$

A2. Ответ: 1.

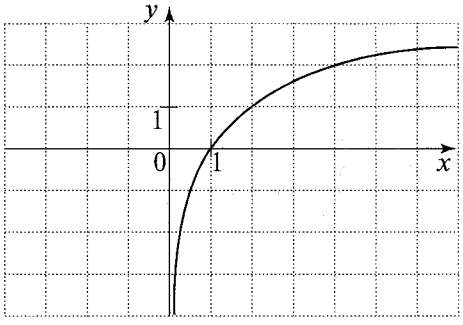
Решение. Применив свойство произведения корней, получим

$$\sqrt[3]{72}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{72\cdot 3}=\sqrt[3]{216}=6.$$

A3. Ответ: 4.

Решение. Применив основное логарифмическое тождество, получим $4-2^{\log_2 6}=4-6=-2$.

A4. Ответ: 2.



Решение. На рисунке изображен график возрастающей функции, принимающей как положительные значения (часть графика расположена над осью абсцисс), так и отрицательные (часть графика – под осью абсцисс). Из предложенных четырех функций оба этих свойства имеет только $y = \log_2 x$.

A5. Ответ: 3.

* Номер верного ответа из числа предложенных к заданию.

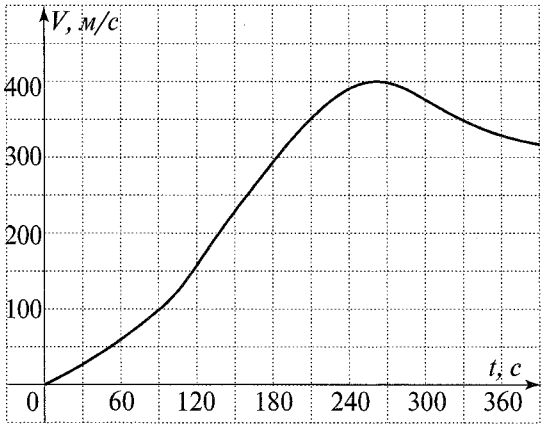
Решение. Найдем производные каждого члена разности и найдем их разность:

$$h'(x) = (4x^2)' - (\sin x)' = (4 \cdot 2 \cdot x^{2-1}) - (\cos x) = 8x - \cos x.$$

A6. Ответ: 1.

Решение. Множество значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел. При умножении каждого действительного числа на 2 получаем это же множество.

A7. Ответ: 2.



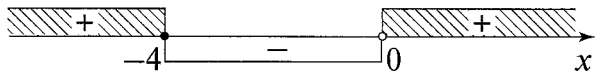
Решение. Скорости 350 м/с и более соответствует часть графика, лежащая над горизонтальной прямой, расположенной между отметками 300 и 400 на оси ординат. Эта часть графика соответствует отрезку [210; 330] на оси абсцисс. Итак, 330 – 210 = 120.

A8. Ответ: 3.

Решение. Неравенство $\frac{3x+12}{7x}\geq 0$ равносильно неравенству $\frac{3(x+4)}{7x}\geq 0$, а значит, и неравенству $\frac{x+4}{x}\geq 0$.

Решим последнее неравенство методом интервалов.

Функция $f(x)=\frac{x+4}{x}$ обращается в нуль в точке -4 и не определена при $x = 0$. Эти точки разбивают область определения функции на три интервала. На рисунке отмечен знак f в каждом из интервалов. Неравенство нестрогое, поэтому число -4 (нуль функции) является решением неравенства. Рассматривая рисунок, устанавливаем, что $f(x) \geq 0$ на промежутке $(-\infty; -4]$ или на промежутке $(0; +\infty)$.



A9. Ответ: 4.

Решение. Уравнение $2\cos x-\sqrt{3}=0$ равносильно уравнению $2\cos x=\sqrt{3}$, а значит, и уравнению $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A10. Ответ: 2.

Решение. Неравенство $3^{2x-5}<9$ равносильно неравенству $3^{2x-5}<3^2$. Показательная функция $y=a^t$ с основанием, большим 1 ($a=3$), монотонно возрастает, значит, неравенство $3^{2x-5}<3^2$ равносильно неравенству $2x-5<2$. Отсюда получаем: $2x<7$, $x<3{,}5$.

B1. Ответ: 0,75.

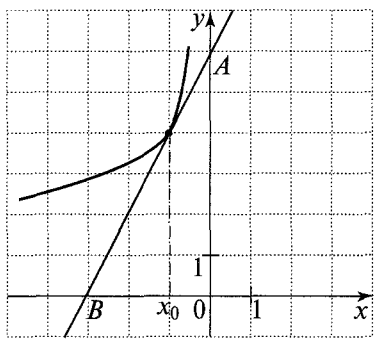
Решение. По определению тангенса $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, следовательно, нужно найти значение $\cos\alpha$. По основному тригонометрическому тождеству получаем $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha>0$, следовательно, $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

Итак, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{4}=0{,}75$**.

B2. Ответ: 2.

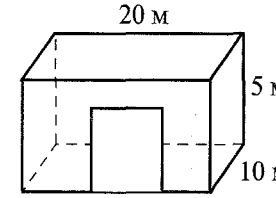
Решение. Значение производной $y'=f(x)$ функции $y=f(x)$ в некоторой точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в его точке с абсциссой x_0. Угловой коэффициент касательной равен тангенсу наклона прямой (касательной) к положительному направлению оси абсцисс, в данном случае, тангенсу угла ABO.

Итак, $f'(x)=\operatorname{tg}B=\frac{AO}{BO}=\frac{6}{3}=2$.



** В соответствии с инструкцией ответ к заданиям типа В должен быть целым числом или десятичной дробью.

B3. Ответ: 1200.



Решение. Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Площадь боковой поверхности склада равна $(10+20)\cdot 2\cdot 5=300$ (м^2). Вычитая площадь ворот, получаем площадь окрашиваемой поверхности: $300-3\cdot 4=288$ (м^2). Так как средний расход краски равен 100 г = 0,1 кг на 1 м^2, получаем, что одной банки (10 кг краски) хватит для окрашивания 100 м^2 стен. Следовательно, потребуется 3 банки на сумму:

$$400\cdot 3=1200 \text{ (руб.)}.$$

B4. Ответ: 3.

Решение.

$$4^x-3{,}5\cdot 2^{x+1}-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2^2)^x-3{,}5\cdot 2\ 2^x-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2^x)^2-7\cdot 2^x-8=0.$$

Получили квадратное уравнение $t^2-7t-8=0$, где $t=2^x$. Решив квадратное уравнение, получим $2^x=-1$ и $2^x=8$. Первое из полученных уравнений корней не имеет, так как показательная функция принимает только положительные значения. Из второго уравнения получаем $x=3$.

B5. Ответ: 3.

Решение. График производной пересекает ось абсцисс в трех точках, значит, производная трижды обращается в ноль: при $x=0$, $x=3$, $x=5$. В точках $x=0$ и $x=5$ производная меняет знак с минуса на плюс, и только в точке $x=3$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, именно в этой точке функция $y=f(x)$ имеет максимум.

B6. Ответ: 1,75.

Решение. Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, получаем:

$$\frac{\log_7 36}{\log_7 6}-\log_{49}\sqrt{7}=\frac{\log_7(6^2)}{\log_7 6}-\frac{\log_7(7^{0{,}5})}{\log_7(7^2)}.$$

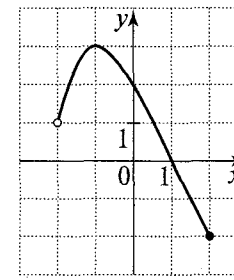
По свойству логарифма степени получаем:

$$\frac{2\cdot\log_7 6}{\log_7 6}-\frac{0{,}5\cdot\log_7 7}{2\cdot\log_7 7}=$$
$$=2-0{,}25=1{,}75.$$

B7. Ответ: −14.

Решение. В соответствии с определением периодической функции получаем:

$f(7)=f(-1+2\cdot 4)=f(-1)$.



По графику находим, что $f(-1) = 3$. Аналогично получаем:

$$f(-4) = f(0 - 1 \cdot 4) = f(0) = 2;$$
$$f(-10) = f(2 - 3 \cdot 4) = f(2) = -2.$$

Следовательно,

$(f(7) + 2f(-4)) \cdot f(-10) = (3 + 2 \cdot 2) \cdot (-2) = -14$.

B8. Ответ: -1.

Решение. В соответствии с определением модуля числа только модули чисел 4 и -4 равны числу 4, поэтому получаем:

$$|x| - 3 + a = 4 \text{ или } |x| - 3 + a = -4,$$

т.е.

$$|x| = 7 - a \ (*) \text{ или } |x| = -1 - a \ (**).$$

Уравнение $|x| = m$ имеет 2 корня (если $m > 0$), 1 корень (если $m = 0$), не имеет корней (если $m < 0$).

Исходное уравнение имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда уравнение (*) имеет 1 корень, а уравнение (**) имеет 2 корня, или уравнение (**) имеет 1 корень, а уравнение (*) имеет 2 корня:

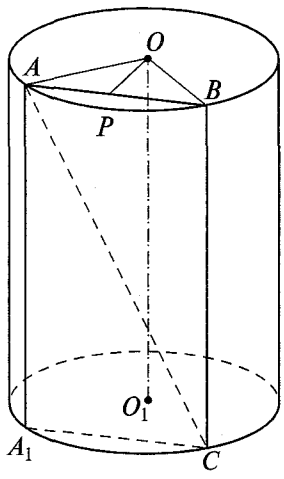
$$\left[\begin{cases} 7-a=0 \\ -1-a>0, \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a=7 \\ a<-1, \end{cases}\right.$$
$$\left.\begin{cases} 7-a>0 \\ -1-a=0 \end{cases}\right. \quad \left.\begin{cases} a<7 \\ a=-1. \end{cases}\right.$$

Решение совокупности: $a = -1$.

B9. Ответ: 350.

Решение. В 100 г 9%-го раствора содержится 9 г уксуса. Если 9 г уксуса составляют 2% раствора, то вся масса раствора равна $(9 : 2) \cdot 100 = 450$ (г). Значит, надо добавить $450 - 100 = 350$ (г) воды.

B10. Ответ: 5.



Решение. Проведем через прямые AA_1 и AC плоскость. Эта плоскость пересечет боковую поверхность цилиндра по образующей (обозначим ее BC). Так как $AA_1 \parallel OO_1$, плоскость AA_1C параллельна прямой OO_1. Значит, искомое расстояние между прямыми OO_1 и AC равно расстоянию между прямой OO_1 и плоскостью AA_1C.

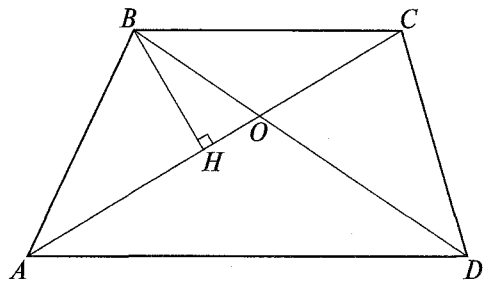
Пусть $OP \perp AB$, где $P \in AB$. Так как $AA_1 \perp AOB$, то плоскости AOB и ABC перпендикулярны, поэтому $OP \perp ABC$, и значит, искомое расстояние равно длине отрезка OP. В прямоугольном треугольнике ABC $AB = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$. Так как отрезок OP – высота, а значит, и медиана равнобедренного треугольника AOB, то в прямоугольном треугольнике AOP $AP = 0{,}5AB = 12$, следовательно, $OP = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

B11. Ответ: 49.

Решение. В треугольниках AOD и COB углы при вершине O равны, $\angle A = \angle C$, следовательно, треугольники подобны. Поэтому

$$S_{AOD} : S_{COB} = AO^2 : CO^2,$$

и, значит, $AO : CO = 4 : 3$.



Треугольники AOB и COB имеют общую высоту BH, следовательно, $S_{AOB} : S_{COB} = AO : CO = 4 : 3$. Отсюда получаем: $S_{AOB} = \frac{4}{3} \cdot S_{COB}$, значит, $S_{AOB} = 12$. Треугольники ABD и ACD имеют общее основание и равные высоты, следовательно, $S_{ABD} = S_{ACD}$. Поэтому

$$S_{COD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{AOB}.$$

Поскольку $S_{COD} = S_{AOB} = 12$, искомая площадь трапеции равна $16 + 9 + 2 \cdot 12 = 49$.

C1. Ответ: $-0{,}4$.

Решение.

1) $|2x - 6{,}5| \le 3{,}5 \Leftrightarrow -3{,}5 \le 2x - 6{,}5 \le 3{,}5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 \le 2x \le 10 \Leftrightarrow 1{,}5 \le x \le 5.$

2) $f'(x) = -3 \cdot \dfrac{(x^2+9) - x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{3 \cdot (x^2-9)}{(x^2+9)^2}$

$f'(x) = 0$ при $x = -3$ и при $x = 3$; $-3 \notin [1{,}5;\ 5]$, $3 \in [1{,}5;\ 5]$.

$$f(1{,}5) = -\frac{2}{5},\ f(3) = -\frac{1}{2};\ f(5) = -\frac{15}{34}.$$

Наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[1{,}5;\ 5]$ равно $-0{,}4$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) определен промежуток, на котором требуется найти наименьшее значение функции; 2) найдено наименьшее значение функции. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены описка и/или вычислительная ошибка в шаге 2), не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла

С2. Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Решение. 1) $\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x}=\frac{\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos 2x-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos^2 x-\cos x-1}{\operatorname{tg} x}=0.$$

2) Последнее уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}2\cos^2 x-\cos x-1=0\\ \sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}\\ \cos x=1\end{array}\right.\\ \sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составлено и преобразовано уравнение по условию задачи; 2) найдены корни полученного уравнения. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена вычислительная ошибка или описка в шаге 2), не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла

С3. Ответ: $3 < x \le 81,\ x \ge 243$.

Решение. Так как $x > 3$, то $\log_3 x > 1$. Далее в решении (пункты 1, 2, 3) учитываем условие $\log_3 x > 1$.

1) $a \ge 7 \Leftrightarrow \log_3 x + 5\log_x 27 - 1 \ge 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\log_3 x+5\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 x}-8\ge 0\Leftrightarrow\log_3 x+\frac{15}{\log_3 x}-8\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_3^2 x-8\log_3 x+15}{\log_3 x}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x\ge 5\\ \log_3 x\le 3.\end{array}\right.$$

2) $b\ge 7\Leftrightarrow 23-\log_3^2 x\ge 7\Leftrightarrow 16-\log_3^2 x\ge 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(4-\log_3 x)(4+\log_3 x)\ge 0\Leftrightarrow\log_3 x\le 4.$$

3) Наибольшее из чисел a и b **не меньше** 7 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них не меньше 7, т.е. когда

$$\left[\begin{array}{l}a\ge 7\\ b\ge 7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x\ge 5\\ \log_3 x\le 3\\ \log_3 x\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x\ge 5\\ \log_3 x\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 243\\ x\le 81.\end{array}\right.$$

Учитывая условие $x > 3$, получаем $3 < x \le 81$ или $x \ge 243$.

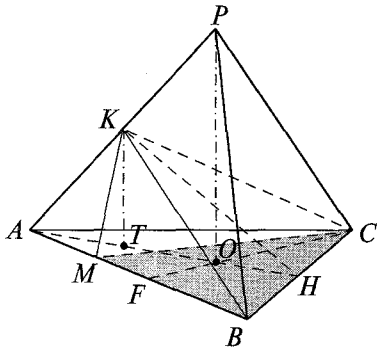
Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведено верное решение, содержащее в каком-либо порядке и виде следующие шаги: 1) решение первого неравенства; 2) решение второго неравенства; 3) составление совокупности указанных двух неравенств и ее решение. Получен верный ответ

3	Приведено логически верное решение, содержащее шаги 1), 2) и 3). Получен ответ. Допустимы вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок возможен неверный ответ
2	Верно выполнены шаги 1) и 2) решения, а шаг 3) либо отсутствует, либо не доведен до конца, либо выполнен неверно. Ответ не получен или неверен
1	Верно выполнен один из шагов 1) или 2) решения, а остальные шаги либо отсутствуют, либо не доведены до конца, либо выполнены неверно. Ответ не получен или неверен
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1–4 балла

С4. Ответ: 4.

Решение. 1) Пусть O – центр сферы радиуса R, описанной около пирамиды $PABC$. Так как $OA = OB = OC = OP = R$, а $O \in ABC$, то точка O – является и центром окружности радиуса R, описанной около треугольника ABC. Так как треугольник ABC – правильный, точка O – точка пересечения медиан треугольника ABC, $AB = R\sqrt{3}$, а AH – высот треугольника ABC равна $\frac{3R}{2}$.

Поскольку пирамида $PABC$ – правильная, то PO – высота пирамиды, т.е. $PO \perp ABC$.



2) Пусть $KT \perp AO$, тогда $KTPPO$ и $T \in AO$. Следовательно, прямая AH – проекция прямой KH на плоскость ABC. Так как $AH \perp BC$, то и $KH \perp BC$, следовательно, угол AHK – линейный угол двугранного угла между плоскостями ABC и KBC.

В прямоугольном треугольнике KTH

$$KT = TH \cdot \operatorname{tg}\angle H = 0{,}5TH.$$

В прямоугольном треугольнике APO $AO = PO$, поэтому $\angle A = 45°$. Следовательно, $AT = KT$. Итак, $AT = 0{,}5TH$. Следовательно,

$$AT = KT = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}R = \frac{R}{2}.$$

3) $V_{KBCM} = \frac{1}{3}\cdot KT \cdot S_{BCM}$. Так как $BM : AB = 3 : 4$, то $S_{BCM} = \frac{3}{4}S_{ABC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9R^2\sqrt{3}}{16}$.

Следовательно, $V_{KBCM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{9R^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3R^3}{32}\sqrt{3}$.

По условию задачи $V_{KBCM} = 6\sqrt{3}$. Значит, $\frac{3R^3}{32}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, откуда $R = 4$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) установлено положение центра сферы, описанной около пирамиды $PABC$; 2) установлено положение основания высоты пирамиды $KBCM$; 3) объем пирамиды $KBCM$ выражен через радиус R сферы, описанной около пирамиды $PABC$, вычислена величина R. Верно обоснованы ключевые моменты решения: а) центр сферы, описанной около пирамиды $PABC$, – точка пересечения медиан основания пирамиды; б) основание высоты пирамиды $KBCM$ лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ
3	Приведены все шаги решения 1)–3). Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения. Допустимы отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях, но не грубые ошибки. (Неточностью в обосно-

3	ваниях является замена свойства на определение или на признак или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.) Допустимы одна описка и/или негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ
2	Приведены шаги решения 1)–3). Утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения, либо оба отсутствуют, либо приведено только одно из них. Но сами ключевые моменты использованы в решении. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы описки и/или негрубые ошибки в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: указано положение центра описанной сферы (описано словесно либо отражено на чертеже). Найдены некоторые числовые характеристики пирамиды $KBCM$, например, длина высоты выражена через радиус сферы, описанной около пирамиды $PABC$. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок. Допустимы негрубые ошибки в преобразованиях и вычислениях, не влияющие на правильность хода решения
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления 1–4 баллов

C5. Ответ: 0.

Решение. 1) Так как $0{,}04^{-|x|} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-|x|} = 5^{2|x|}$,

$25^{0{,}5|x|+0{,}5} = 5^{2\cdot(0{,}5|x|+0{,}5)} = 5^{|x|+1} = 5 \cdot 5^{|x|}$,

то исходное уравнение можно привести к виду $(0{,}5 - 1{,}75p) \cdot 5^{2|x|} + (0{,}75p - 2{,}5) \cdot 5^{|x|} + p + 3 = 0$.

Пусть $5^{|x|} = t$, тогда $t \geq 1$. Получаем квадратное уравнение относительно t с параметром p:

$(0{,}5 - 1{,}75p)t^2 + (0{,}75p - 2{,}5)t + p + 3 = 0$. (*)

Число различных корней этого уравнения не больше 2, значит, число n различных корней исходного уравнения не больше 4, т.е. $n \leq 4$.

2) Если $n = 0$, то по условию $p^2 + 2p + 4 = 0$, что невозможно, так как $D = -12 < 0$.

Если $n = 1$, то $p^2 + 2p + 4 = 1$, $p^2 + 2p + 3 = 0$, что невозможно, так как $D = -8 < 0$.

Если $n = 2$, то $p^2 + 2p + 4 = 2$, $p^2 + 2p + 2 = 0$, что невозможно, так как $D = -4 < 0$.

Если $n = 3$, то $p^2 + 2p + 1 = 0$, $(p + 1)^2 = 0$, $p = -1$. Тогда уравнение (*) примет вид $9t^2 - 13t + 8 = 0$. Это уравнение не имеет корней, так как $D < 0$. Следовательно, исходное уравнение не имеет корней, что противоречит равенству $n = 3$.

3) При $n = 4$, получаем $p^2 + 2p = 0$, откуда $p_1 = -2$, $p_2 = 0$.

Пусть $p = -2$. Тогда уравнение (*) примет вид $4t^2 - 4t + 1 = 0$, $(2t - 1)^2 = 0$, $t = \frac{1}{2}$, что не удовлетворяет условию $t \geq 1$. Следовательно, исходное уравнение не имеет корней, что противоречит равенству $n = 4$.

При $p = 0$ уравнение (*) примет вид $t^2 - 5t + 6 = 0$. Оба корня $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$ удовлетворяют условию $t \geq 1$. Итак, $5^{|x|} = 2$ или $5^{|x|} = 3$. Следовательно, исходное уравнение имеет ровно 4 различных корня. Значит, условию задачи удовлетворяет $p = 0$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) тождественные преобразования показательных выражений и оценка $n \leq 4$ числа корней исходного уравнения; 2) разбор случаев $n = 0$, $n = 1$ и $n = 3$; 3) разбор случая $n = 4$, проверка того, что $p = -2$ не удовлетворяет условию, а $p = 0$ удовлетворяет. Обоснованы все моменты решения: а) в шаге 2) обосновано отсутствие корней исходного уравнения; б) в шаге 3) случай $p = -2$ обоснован свойствами квадратичной функции и/или явным указанием ее нулей; в) в шаге 3) при рассмотрении случая $p = 0$ имеется ссылка на условие $t \geq 1$. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 3) допустимо отсутствие обоснования в). Обоснованы ключевые моменты а) и б).

3	Допустимы 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка в шаге 3), не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате может быть получен неверный ответ
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Верно выполнен шаг 1). В шаге 2) верно исследован только один из случаев $n = 0$, $n = 1$ или $n = 2$. При их рассмотрении обоснован хотя бы один из ключевых моментов а). Допустимо, что решение не завершено
1	Общая идея, ход решения верны. Верно выполнен шаг 1): исходное уравнение сведено к квадратному относительно новой переменной. Получена оценка $n \leq 4$ числа корней исходного уравнения. Допустимо, что решение не завершено
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла