Земляков А. Н.

Элективный курс «ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ И АНАЛИЗ: культурно-исторический дискурс»

10/11 классы

МЕТОДИЧЕСКИЙ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Пособие для учителя

Москва — 2004

Данное пособие состоит из концептуальной части (разделы 1–2, содержащие *методический и методологический комментарий* ко всему курсу в целом, рассматриваемому в более широких рамках *углубленного математического образования* в старших классах средней школы), формально-описательной части (раздел 3, содержащий *программу* курса и комментирующие ее дополнения, а также общую характеристику *учебного пособия*) и практической части (разделы 4–5, в которых дается собственно *методический комментарий* к учебному пособию.

Более конкретно, после краткого *предисловия*, в котором дана совсем общая характеристика рассматриваемого элективного курса **«Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс»**, следуют два общих раздела:

— *современные концепции истории математики и история математики в школе*;

— *стили обучения математике и культурно-исторический дискурс в преподавании и учебнике.*

Далее в разделе 3 кратко изложены общие методические положения и установки данного курса и дана программа всего курса. Наконец, в двух последних разделах приведены конкретные методические рекомендации (и некоторые методологические замечания) по двум главам этого курса.

Задача данного пособия — не только помочь учителю в проведении занятий элективного курса, но и способствовать выработке педагогической и методологической точки зрения на всю проблему диалектики взаимоотношений *математики, ее истории и ее преподавания.*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 4

Раздел 1. ЧТО ТАКОЕ «ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ»

1.1. Концепции истории математики 7
1.2. История математики в школе 11
Список литературы 17

Раздел 2. ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ И КУЛЬТУРНО-ИСТОРИЧЕСКИЙ ДИСКУРС

2.1. Три тезиса о профильных классах и концепция М. Серра 27
2.2. NOTA BENE: стиль изложения! 36
2.3. Традиционная образовательная парадигма 40
2.4. Значение культурно-исторического дискурса 44
2.5. Культурно-исторический дискурс в обучении и в учебнике 47

Раздел 3. КУРС «МИР, МАТЕМАТИКА, МАТЕМАТИКИ»

3.1. Цели и задачи курса. Знания, умения, компетенции 51
3.2. Программа курса 53
3.3. Примерное тематическое планирование 54
3.4. Общие и организационные рекомендации 55
3.5. Общая характеристика учебного пособия по курсу 56

Раздел 4. Тема 1: ВВЕДЕНИЕ В ИСТОРИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Общие замечания и рекомендации по теме 1 xx
§ 1.1. Уравнения квадратные и кубические 65
§ 1.2. Великое искусство и жизнь Джероламо Кардано 68
§ 1.3. Уравнения четвертой степени 70
§ 1.4. Уравнения и многочлены 73
§ 1.5. Следствия из теоремы Безу 76
§ 1.6. Аналитическое искусство и жизнь Франсуа Виета 79
§ 1.7*. Теорема Виета и комбинаторика 81
Комментарии и указания к упражнениям и задачам xx

Раздел 5. Тема 2: ПРЕДЫСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Общие замечания и рекомендации по теме 2 82
§ 2.1. Галилей и Декарт. Новая математика 86
§ 2.2. Координаты. Жизнь и вера Декарта 93
§ 2.3. Задачи на максимум и минимум. Ферма и наука 100
Комментарии и указания к упражнениям и задачам 102

ПРИЛОЖЕНИЕ 1: УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН xx
ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ xx

ПРЕДИСЛОВИЕ:

Место данного курса в системе обучения математике в средней школе

Тот, кто, обращаясь к старому, способен открывать новое, достоин быть учителем.

Конфуций

Предлагаемый элективный курс «Введение в алгебру и математический анализ: культурно-исторический дискурс» по своему чисто математическому содержанию примыкает к базисному/профильному курсу алгебры и начал анализа. Однако главное его содержание и направленность — на показ конкретных культурно-исторических ситуаций тех или иных затрагиваемых в курсе достижений математики — в диапазоне от Вавилона и Древней Греции до Нового времени.

Подобный подход к математике в рамках *культурно-исторического дискурса*, т.е. подключение к изложению конкретного математического материала сопутствующих сведений конкретно-исторического характера, т. е., по существу, соответствующего *материала по истории математики*, носит развивающий характер во многих отношениях. Именно так можно адекватно показать учащимся *сущность* предмета математики, *значение математики* в исторической практике, настоящую *роль математиков* не только в развитии математики, но и в общественной жизни. Это же работает и на *развитие интереса* к предмету, на *заинтересованное, эмоциональное, психологическое отношение* к нему, что не может не повлиять на бóльшую успешность в его сиюмоментном и будущем изучении.

Отметим, что данный курс не есть курс истории математики, а *именно* курс математики (алгебры и начал анализа) в лоне истории — социально-культурного ее окружения. Просто история математики без собственно математики и так невозможна. Мы связываем историю с совершенно конкретными математическими фактами, преподносимыми не так, как это было исторически, а на современном дидактическом уровне. На фоне математики раскрывается ее история, на фоне истории — сама математика. По поводу такой диалектической двойственности: математика в историческом развитии и математика в обучении самому предмету, будь то в школе или в вузе, — выдающийся писатель и философ XX в. аргентинец *Хорхе Луис Борхес* (1899–1986) писал: «*История математики ... страдает одним неисправимым недостатком: хронологический порядок событий не соответствует порядку логическому, естественному. Четкое определение элементов во многих случаях приходит последним, практика предваряет теорию, импульсивный труд предшественников менее понятен для профана, нежели труды современных ученых*». Это в полной мере относится и к преподнесению, преподаванию алгебры и математического анализа.

Одному из создателей анализа, французскому энциклопедисту *д'Аламберу*, приписывают слова: «*Шагайте вперед, и вера к вам придет*». Основоположники анализа — *Ньютон*, *Лейбниц*, их сподвижники и продолжатели — так и шли в XVII–XVIII вв., не очень-то беспокоясь об обоснованиях, о логической (математической!) строгости. Лишь в первой половине XIX в. стараниями, прежде всего, *Коши*, под грандиозное здание математического анализа был подведен основательный фундамент. Именно *Коши*, отчасти следуя *д'Аламберу* (и, конечно, *Ньютону*), ввел понятия предела и бесконечно малой, дал через них определение непрерывности функции и производной, т.е. впервые сформулировал то, с чего и начинаются современные изложения курсов анализа.

Знать и понимать диалектику математики не только полезно, но и необходимо, ибо без этого не понять и суть математики, ее отношение к реальному миру, роль личностей и исторических обстоятельств в ее развитии и, в конечном счете, взаимосвязи математики с современной культурой и цивилизацией. Здесь не могут помочь никакие лозунги типа «Математика — царица наук», здесь нужно реальное знакомство с математикой на фоне истории и жизни ее создателей.

Идеи, подвигавшие творцов математики, не только интересны, но и полезны для более глубокого понимания современных подходов к тому же самому. Знакомство же с судьбами творцов, нередко драматичными, позволяют более эмоционально, глубоко и как бы лично воспринимать математику.

В данном элективном курсе рассматривается история тех разделов элементарной математики (пока не касаясь самого математического анализа), которые наиболее близки к школьной алгебре. Алгебру можно назвать наукой (и *искусством*, как ее называли математики XVI века!) о преобразованиях различных *алгебраических выражений* и отыскании решений разнообразных *алгебраических уравнений*. В школе досконально разбираются *линейные* и *квадратные* уравнения. Математики занимались ими с незапамятных времен — в Вавилоне, в Египте, в Древней Греции еще до нашей эры, на Востоке — в Средние века, в Европе — начиная со 2-го тысячелетия вплоть до эпохи Возрождения. То, чему сейчас учат в школе, нередко имеет многотысячелетнюю историю, причем отнюдь не анонимную: математические достижения, в том числе и в решении квадратных уравнений, всегда имеют авторов, причем, как правило, многих.

Древние греки, а вслед за ними, например, *Омар Хайям*, пытались решить и кубические уравнения. Все они весьма немного преуспели. Только в XVI в. математикам удалось научиться решать кубические уравнения, а вслед за ними и уравнения степени 4. Со времени *Кардано*, одного из самых выдающихся ученых эпохи Возрождения, начала развиваться общая теория алгебраических уравнений. Одновременно с этим шли упорные поиски общих формул для решения уравнений степени 5 и выше. Они потерпели, как известно, фиаско, но это не было поражением математики (алгебры) и математиков. Напротив, достижения *Руффини,*

Абеля и Галуа, доказавших *неразрешимость* уравнений степени 5 и выше в радикалах, послужили стимулом для развития совсем новых алгебраических и аналитических теорий. Такова диалектика математики...

Кроме истории алгебраических уравнений, доведенной до изобретений и открытий *Виета*, в данном курсе рассматривается краткий, но крайне важный период почти революционного развития математики: вторая четверть XVII в., бывшая как бы временем сумерек перед рассветом — изобретением совсем новой области математики, *математического анализа*. Характерные *личности* этого времени — *Галилей, Ферма* и *Декарт*. Так что история школьной алгебры прослеживается в этой части вплоть до зарождения анализа.

Прежде, чем перейти к конкретным характеристикам данного элективного курса, мы рассмотрим, по-возможности кратко (но не «бегло»!), понятия, ключевые для верного понимания как *идей*, так и *методологии построения*, и для *методики преподавания* электива такого типа: *история математики, стиль преподавания* или *образовательная парадигма, культурно-образовательный дискурс — его суть и роль, возможности в обучении и в учебнике*. Отметим, что большинство глав[1] из разделов 1–2 и взяты из разработанной нами несколько лет тому назад *общей концепции углубленного математического образования* (**УМО**!) в старших классах средней школы; на базе этой концепции тогда же был сконструирован проект учебника по алгебре и математическому анализу (который иногда упоминается[2]). Она же была положена в основу концепции разработанного элективного курса и учебного пособия к нему, поэтому, полагаем, что хотя бы частичное ознакомление с общей концепцией поможет лучше разобраться с данным курсом. «Сугубый практик» может пропустить разделы 1–2 и сразу перейти к конкретике элективного курса — к методико-методологическому разделу 3 или даже «чисто практическим» разделам 4-5[3].

Отметим, что из разделов 1–2 главную и, можно сказать, первую роль играет *второй* раздел, в котором последовательно рассматриваются ведущие идеи преподавания и построения курсов с учетом культурно-исторического дискурса предмета. Но так или иначе, в данном курсе место, *равноценное* с местом математики, занимает *история математики*. Если с математикой как предметом все ясно и понятно, то с предметом *истории математики* сначала нужно, как говорят, «*определиться*». Так что основному разделу предпослан *вводный* раздел 1, в котором сначала четко объясняется, что мы понимаем под «историей математики», а затем анализируются возможные *традиционные* подходы к введению и ведению этого предмета в школе.

[1] Вернее, «главок»; мы остановились на такой рубрикации потому, что эти «главы-главки» могут быть развернуты в настоящие значительные по объему исследования.

[2] Заметим, что именно в силу этого для представляемого элективного курса была избрана тематика *алгебры* и *анализа* (как бы минуя *геометрию*, которая, конечно, также представляет особый интерес).

[3] Хотя, повторим, разделы 1–2 представляют, на наш взгляд, *независимый интерес* и способны принести практическую пользу.

Раздел 1. ЧТО ТАКОЕ «ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ»

Глава 1.1. КОНЦЕПЦИИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

— Hoc est simplicissimum, — сказал Хосе Аркадио Буэндиа. — Homo iste statum quartum materiae invenit.

Габриэль Гарсиа Маркес

В одной из следующих глав (2.2), посвященной выдвигаемому и реализуемому (вернее, *демонстрируемому*) при нашем подходе к **УМО** (т. е. *углубленному математическому образованию*; сюда же относится и *профильное образование*) *стилю обучения*, преподавания, указывается на такую важную с воспитательной и психологической точки зрения его черту, как использование *культурно-исторического дискурса* предмета. Говоря совсем по-простому, это означает подключение к изложению конкретного математического материала сопутствующих сведений конкретно-исторического характера, т. е., по существу, соответствующего *материала по истории математики*. Для целенаправленного и успешного применения такого подхода (или *осуществления такого стиля преподавания*) учителю, прежде всего, нужно *самому* знать историю предмета, хорошо представлять себе, *что такое* ***история математики***. Это мы и попытаемся объяснить в данном разделе. Собственно культурно-историческому дискурсу в процессе обучения математике посвящены последние главы следующего раздела.

История математики, как и сама математика, может пониматься двояко: во-первых, как *научная дисциплина*, наука, *историография* в данном случае; во-вторых, как *учебная дисциплина*, учебный предмет, так или иначе осваиваемый в процессе обучения или изучения соответствующей научной дисциплины — именно *этой* науки: истории математики.

Историю математики можно изучать и безотносительно к изучению самой математики — как можно быть *историком математики*, не будучи *математиком* (в смысле «математиком-профессионалом»). Конечно, при этом придется-таки разобраться (необходимо разбираться) в сопутствующих математических деталях, но совсем необязательно изучать соответствующие (современные) математические теории. Такому подходу (точнее даже, *таким подходам*) к истории математики как к *учебной дисциплине* (в рамках средней школы) посвящена следующая довольно пространная глава 1.2. Здесь же мы кратко остановимся на истории математики как *научной дисциплине*, на ее *значении как науки*.

«Эта» история математики базируется на изучении документов, от клинописных источников и папирусов до печатных изданий, архивов, прочих так или иначе зафиксированных событий и т. д., в совокупности именуемых «фактами» — фактами, составляющими основу теорий и событийную историю прошлого. Факты подвергаются упорядочению,

комментированию, публикованию — в качестве примеров можно привести хрестоматии (скажем, [36]; обе главы раздела снабжены единым и весьма обширным списком литературы) и издания сочинений (например, [112]–[114]); далее, *самое главное*, факты *истолковываются, интерпретируются* — с тем, чтобы *так или иначе* воссоздать, *реконструировать* прошлое математики — событийное и теоретическое, — как правило, в его последовательности, развитии, связи с настоящим. Так работают историки математики; кроме того, тем или иным образом исторические факты подвергаются истолкованиям, иногда даже неосознанным, работающими математиками-профессионалами, преподавателями математиками, философами науки...

Существуют разнообразные подходы к изучению исторических фактов, их интерпретации и последующей реконструкции прошлого. Основных подходов, или даже *типов* подходов[1] — иными словами, ***концепций истории математики***, — можно выделить пять (номинально отличная от приводимой нами, но по сути та же классификация «типов реконструкции истории» дается в сравнительно недавней [1995] статье британского специалиста по математическому образованию *Лео Роджерса*: «*Историческая реконструкция математического знания*»[2]; ниже ссылки на эту статью обозначены [Роджерс] — к ней мы обратимся и в следующем разделе).

1. *Эмпирическая концепция*, которая длительное время и воспринималась как собственно история математики, состоит в хронологическом реконструировании прошлого как *исторического прогресса* ***математических идей***. Эта концепция является главенствующей и в настоящее время, несмотря на появление методологически обоснованных конкурирующих подходов; множество монографий и учебников по истории математики (укажем, например, трехтомник [66]) отражают именно такой подход.

2. *Социально-культурная концепция* рассматривает историю математики в контексте общественного — экономического, политического, культурного, технологического — развития. Хотя роль социального и культурного окружения в развитии математики и считается «*сравнительно недавним достижением*» [Роджерс, с. 75], книги, частично отражающие указанную концепцию, появились уже давно (см., например, блестящие монографии [147]–[148] или учебную книгу [133]).

3. *Личностно-ориентированная концепция* строится на основе анализа индивидуальных творческих процессов, логики математических открытий, психологии изобретений, так что история математики предстает в ней как история «творцов математики» (**Men of Mathematics** — по названию яркой книги этого направления американского математика

[1] Ибо самих подходов практически столько же, сколько исследователей и интерпретаторов!

[2] См. журнал «Математическое образование», 2001, № 1 с. 74–85.

Белла: *E. T. Bell*, 1937; неполный русский перевод [14]). Данная концепция «*затрагивает одну значительную проблему, связанную с математикой, а именно: как сделать математику значимой в рамках всей культуры в целом, и интеллектуально доступной на всех уровнях*» [Роджерс, с. 81]. Заметим, что на решение этой проблемы во многом направлена и предыдущая концепция — обе они существенны в предложенной нами реализации культурно-исторического дискурса в контексте математического образования (см. следующий раздел).

4. *Концептуальная интерпретация* истории математики трактует факты и события, реконструирует математические теории прошлого в соответствии с современным состоянием математики — интерпретирует всю (по возможности) «предшествующую» математику в рамках современной теории, как ее «зародыш»... Таков, например, подход *Бурбаки* в «Очерках по истории математики» [28]. По сути, при этой концепции история математики должна все время (или время от времени) переписываться, ибо «современное состояние» математики, конечно, изменяется; однако для математиков-профессионалов (или «историков-концептуалов») данный подход имеет свою «прелесть»: наверное, приятно осознавать, что имеешь предшественников, предтеч[1]!

5. Наконец, в истории математики возможна и *герменевтическая интерпретация*, основанная на все большем уточнении и вовлечении в «*реконструкцию математического знания*» исторических *текстов*. На это указывает Роджерс, приводя в качестве примера необходимость соответствующей интерпретации лишь недавно (1988) вошедших в научно-исторический обиход нематематических текстов Ньютона — в том числе и богословских (см. также весьма интересную статью: *И. С. Дмитриев*, «*Религиозные искания Исаака Ньютона*» — журнал «Вопросы философии», 1991, № 6, с. 58–67.)

Если говорить об истории математики как об учебной дисциплине, *предмете изучения в средней школе*, то из пяти перечисленных концептуальных подходов первые три вполне (или, по крайней мере, *в определенной мере*) могут быть реализованы как учебные курсы. Они и рассматриваются (в несколько другом порядке) в следующей главе 1.2.

Теперь о значении и о функциях истории математики.

Прежде всего, к ней можно отнести все то, что касается истории (историографии) любой другой науки. Процитируем в этой связи итальянских историков философии *Джованни Реале* и *Дарио Антисери*, в высказываемых которыми положениях идет речь об *истории науки вообще*[2]:

«*По поводу функций истории науки можно сказать следующее.*

1). *Если наука есть фактор истории, то ее развитие, особенно в современную эпоху, нельзя понять без детального знания истории науки и технологии.*

---

[1] Как у Александра Блока: «*Всё это было, было, было...*»!

[2] Т. е. о *науке* как *совокупности всех наук*; цит. по их книге: «*Западная философия от истоков до наших дней*» (т. 4. — Санкт-Петербург: Петрополис, 1997; с. 697).

2). *Наука, кроме того, еще и фактор культуры. Поэтому мир культуры без понимания истории науки во взаимообусловленности с историей философии, морали, политики и теологии закрыт.*

3). *Знание истории науки необходимо ... для увеличения содержания теории, важен сам факт сопоставления ее с другими теориями как настоящего, так и прошлого.*

4). *История науки — незаменимый элемент дидактической*[1] *практики, воспитания молодых ученых в духе антидогматизма, для понимания позитивной функции ошибок и правил метода в исследовательской работе.*»

Как говорится, комментарии излишни... Тем более, что положения этих тезисов во многих отношениях легко переформулировать по отношению не к истории науки (математики), а непосредственно касательно самой математики — как учебного (школьного) предмета.

Эти замечания, на наш взгляд, снимают и нередко дискутируемый (а чаще — просто постулируемый[2]!) тезис об *исключительности* математики среди прочих наук — и, соответственно, об *уникальных отличиях* в ее истории (см. [Роджерс, с. 76–77]). Уникальность математики *безусловна* — но равно как и уникальность «прочих» настоящих наук... Однако мы воздержимся от обсуждения примыкающих сюда вопросов и доводов.

Собственно история математики полезна, в первую очередь, трем категориям потенциальных ее пользователей:

— *работающим математикам* (математикам-профессионалам): в качестве методологической поддержки, «подпитки» идеями (об этом, в частности, свидетельствует проявляемый многими выдающимися математиками интерес к истории математики; ограничимся примерами *Феликса Клейна* и *Андрея Николаевича Колмогорова* — см. [72], [80]);

— *преподавателям математики* (в том числе и работающим математикам как преподавателям, и учителям школ): в качестве источника педагогических идей, методических (и методологических) подходов к своей педагогической деятельности (*«это утверждение ... означает не то, что мы не можем преподавать математику, не зная ее истории, но то, что исторический фон доставляет нам идеи и сведения, на которых мы можем основывать наши подходы к преподаванию»* — [Роджерс, с. 78]);

— так сказать, *учащейся молодежи* (студентам — будущим профессионалам и «прикладникам», историкам и философам, — и школьникам, независимо от их возможной специализации, но *особенно* вознамерившимся стать «гуманитариями» или, напротив, *углубленно изучающим* естественно-научные или естественно-математические дисциплины): в качестве стимула к изучению математики, источника общей культуры, движителя в образовании и самообразовании...

---

[1] В смысле *обучающей*.

[2] В духе известного афоризма: «*Математика — царица наук*».

Глава 1.2. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

Опять скажу: никто не обнимет необъятного!

Козьма Прутков

Разработанный уже довольно давно курс «История математики в школе» [46] предназначен для использования на уроках математики и на кружковых занятиях. Это важная сторона работы с учащимися в данном направлении, хотя, на наш взгляд, она должна была бы строится не через какие-то отдельные пособия, а непосредственно через учебник. Но чрезвычайно слабое (фактически — никакое) отражение историко-методологических аспектов математики в школьных учебниках — один из основных их недостатков. Компенсировать его в настоящее время, на наш взгляд, могут элективные курсы по истории математики.

Предмет истории этой древнейшей из наук[1] очень обширен, многобразен, интересен и полезен для изучения — отнюдь не только как своеобразное дополнение к собственно математике. Можно выделить по крайней мере три подхода к истории математики и ее изучению — каждый из них обладает определенной автономностью и может быть положен в основу соответствующего курса. Эти подходы следующие.

1. История математики может рассматриваться как *история* возникновения, развития, воплощения в теорию основных (в настоящее время) математических *идей*. Стандартный, но весьма яркий и далеко себя не исчерпавший пример — идея числа — от арифметики до теории чисел [89], [121], [122], [130], далее от открытия иррациональных чисел [17], [70] до теории действительных и комплексных чисел [6], [90], [89], до абстрактной алгебры [28]. Число подобных примеров можно множить — в этом смысле и история математики, и сама математика неисчерпаемы. Нужно заметить, что указанный подход общепринят в истории математики, и по этому принципу — с той или иной периодизацией — строятся многие ее изложения; укажем, например, на [66], [35], [28]. На наш взгляд, именно такой подход наиболее приемлем для самих математиков, ибо при нем на первый план выходят методологические вопросы. Он же пригоден и в школе для учащихся, углубленно изучающих предмет (или хотя бы желающих углубленно и содержательно изучить его историю). Но здесь возникает естественная и вряд ли вполне преодолимая трудность. Дело в том, что при данном подходе необходимо вникать в математическое существо идей — иначе разговор об идеях становится бессмысленным. Однако в школе (и то с недавних пор) в алгебре, да и в геометрии тоже, доходят до изучения математики примерно времен Ньютона и Лейбница

[1] Напомним, что по-гречески математика — $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$, производное $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ ($mathema$) — «наука», «учение», от глагола $\mu\alpha\theta\alpha\nu\omega$ — «учусь через размышление». В школе Пифагора знали четыре $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$, то есть четыре отрасли науки — учение о числах (арифметику), теорию музыки (гармонию), учение о фигурах и измерениях (геометрию) и, наконец, астрономию и астрологию.

(между прочим, даже это является большим достижением, если учесть, что Феликс Клейн ратовал за изучение в гимназиях элементов математического анализа еще в начале века [73]!). Таким образом, на школьном уровне становится содержательно недоступной математика XIX–XX вв., да и в значительной части математика Ньютона–Эйлера (дифференциальные уравнения, степенные ряды и аналитические функции, классическая механика, etc.). Это тем более ограничивает контингент учащихся, которым можно было бы предложить достаточно полный курс истории математики вплоть до новейшего времени. Вместе с тем, здесь можно предложить некоторый выход. Во-первых, в школе-таки изучаются отдельные вопросы, относящиеся к посленьютоновскому времени — элементы векторной алгебры, непрерывность и пределы функций. Во-вторых, можно опереться и на ряд разделов — по-нашему, идей, — вполне доступных пониманию и усвоению школьниками (как до школьной реформы то было с комплексными числами, комбинаторикой и цепными дробями) и отчасти включенных в недавние факультативы по математике — «Дополнительные главы» и «Избранные вопросы» [141]. Это элементы теории множеств [131], теории групп [134], [67], наглядной топологии [89], [134], [95], комбинаторики и теории вероятностей [134], [126], [82], [15], теории дифференциальных уравнений и теории катастроф [8], [9]. В любом случае, при изучении истории математики как истории идей важно видеть взаимосвязь между идеями, усматривать определенное единство математики при всем ее разнообразии [80].

2. Та же история математики одновременно представляется историей своих творцов — их зачастую во многом примечательной и нередко драматической жизни, историей *Men of Mathematics*, как назвал свою яркую книгу [14] американский математик и замечательный писатель *E. T. Bell* (1937). Под этим углом история математики предстает уже как *история людей*. Она отнюдь не представляет из себя собрания «сведений анекдотического характера о математиках» (выражение из [28]), но, должным образом поданная, дает много для чувств и мыслей. Даже только самые яркие фигуры в своих взаимоотношениях и отношениях с окружавшим их миром дают достаточно примеров, наводящих на размышления — Кардано и Тарталья [148], Ньютон и Лейбниц [7], Гаусс и Лобачевский [94], философ, друг шведской королевы Декарт [101], революционер Галуа [54], геометр, сподвижник Наполеона Гаспар Монж [59], близкий знакомый Генриха Наваррского (Генриха IV) «отец алгебры» Виет [148] и убитый в Варфоломеевскую ночь Рамус [103], etc. История современной математики, в ее связи со всей сложной историей XX века, не менее поучительна: Давид Гильберт и Курт Гёдель [127], американцы из Германии Герман Вейль [158] и Джон фон Нейман[55], русские и советские математики [80], [81]. И важно при этом видеть идейную (в смысле математики и методологии) связь между математиками — через десятилетия, века, тысячелетия. Этот важный с воспитательной точки зрения

аспект истории математики — как истории *Men of Mathematics* — хорошо чувствовали и во многом отразили в своих книгах такие историки математики, как Цейтен [147], [148] и Стройк [133], но вообще-то сейчас нет исчерпывающих книг по истории математики, строго выдержанных в таком направлении, и их трудно себе представить (удачный подход — американский оригинал книги [14]). Зато на русском языке есть два достаточно полных и объемных биографических справочника — [18] и [23], — а также обширный биографический раздел в «Математическом энциклопедическом словаре» [106] (к сожалению, он, как и указанные справочники, ущербен по части известных советских/российских математиков).

3. Третий подход к истории математики связан с соответствующим подходом к самой математике — как к *части культуры*, человеческой цивилизации вообще. Следует отметить, что при своем зарождении математика была таковой непосредственно — см. выше прим. ([1]). Недаром слово «аксиома», $\alpha\xi\iota o\mu\alpha$, перешедшее в математику от философов Древней Греции, означает «достоинство», «уважение», «авторитет», а «теорема», $\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ — «зрелище», «представление» ([4], [98], [99])! В Древней Греции математика была настолько общезначимой, что, согласно легенде, одного из учеников Пифагора, рассказывавшего об иррациональности корня из 2, утопили в реке [17]. На роли, которую математика играла позже — в практике и в культуре, – подробно останавливается Стройк [133]. Но вот уже в XX веке крупнейший математик Герман Вейль замечает: «*Музыка, математика, поэзия и мифотворчество — наиболее присущие человеку области его творческой деятельности, в которых проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии*» (1929; [30], [31]). Что уж тут говорить о приложениях математики, например, в физике (одна из статей Нобелевского лауреата американского физика-теоретика Юджина Вигнера так и называется «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» — [33], [71]), если известный математик Е. С. Вентцель (она же — писатель И. Грекова) в брошюре [105] писала о стирании граней между точными (i.e. применяющими математику) и гуманитарными (вербальными) науками (см., напр., [16]). Подход к истории математики с рассматриваемой точки зрения столь же (если не более!) неисчерпаем, как и предыдущие. Но он по самой постановке вопроса наиболее общезначим — подобный курс истории математики был бы доступен и полезен всем школьникам, особенно же тем из них, которые выбрали гуманитарную специализацию. Остановимся чуть подробнее на двух аспектах данного подхода.

Математики с самого ее зарождения играли виднейшую роль еще и как философы. Первым математиком и вообще первым ученым считается Фалес Милетский. Далее следует расцвет эллинской культуры и

философии, в частности, пифагорейской школы (V в. до н. э.; [64]). С последней связан крупнейший кризис в развитии математики — открытие иррациональных чисел, — преодоленный окончательно только в конце XIX века [70], [6]. И в послеантичный период математика и философия были «неразлучны» [88] — достаточно упомянуть заложивших основы современной философии естествознания Леонардо да Винчи, Галилео Галилея, Рене Декарта [57] и Иоганна Кеплера [69], неортодоксальных религиозных философов Блеза Паскаля (знаменитый аргентинский писатель XX века Хорхе Луис Борхес посвятил теологическим воззрениям Паскаля примечательные эссе «Паскаль» [25] и «Сфера Паскаля» [24]) и Готфрида Вильгельма Лейбница [148]. Качества выдающихся математиков и философов совмещали в себе и ученые XX века. Крупнейшие из них — Анри Пуанкаре [124] (он подвергся критике В. И. Ленина в книге «Материализм и эмпириокритицизм»), Бертран Рассел и Альфред Норт Уайтхед [138]. Примечательно, что с двумя последними математиками-философами связан второй крупнейший кризис математики — открытие парадоксов (то есть противоречивости) интуитивной теории множеств Георга Кантора (один из парадоксов носит название «парадокс Рассела»; [46], IX–X кл.). Они же сыграли значительную роль и в преодолении этого кризиса, будучи в числе тех, кто заложил основы исключающей парадоксы аксиоматической теории множеств [28].

Теперь остановимся на *взаимосвязи* математики и искусства — недаром ведь Пушкин от лица Моцарта писал «*Поверил я алгеброй гармонию*». Зародившись в античную эпоху, эта связь не прерывалась никогда [117]. Идеи симметрии питали и продолжают питать творческое воображение не только архитекторов и художников [30] — например, нашего современника Мориса Эшера [93], — но и поэтов, и писателей — например, упоминавшегося уже Хорхе Луиса Борхеса [139]. Более того, в замечательных работах профессора Московского университета Анатолия Фоменко нашли очень интересное отражение глубокие идеи самой современной математики, включая топологию [142]. С другой стороны, в 1980 году американский математик Бенуа Мандельброт открыл свое знаменитое и неисчерпаемо красивое «множество Мандельброта» на комплексной плоскости — можно сказать, математика *непосредственно* вторглась в эстетику [116]! Следует сказать и о вкладе собственно художников в математику — конечно, это Леонардо да Винчи, своим учением о перспективе заложивший, по сути, основы проективной геометрии, законченной уже математиками Дезаргом, Паскалем, Монжем [20]. А автор знаменитой гравюры «Меланхолия» Альбрехт Дюрер был не менее знаменит своей переведенной на многие языки математической работой «Наставление к измерению циркулем и линейкой», содержавшей построение многих сложных кривых [102].

Итак, математика развивалась в неразрывной связи со своими научными — естественно-научными и гуманитарными, — утилитарными и культурными приложениями. Это обстоятельство, несомненно, заслужи-

вает того, чтобы быть положенным в основу отдельного специального курса истории математики.

Исходя из вышеизложенных соображений, можно предложить три различные программы курсов истории математики для старших классов, которые для удобства и названы по-разному:

История возникновения и развития математики,

Математика и ее творцы,

Математика и цивилизация.

Занятия по каждой программе можно условно подразделить на лекционные и семинарские. Предполагается, что на семинарах учащиеся будут делать реферативные (или даже творческие) доклады (сообщения) с последующим обсуждением основных в данной теме методологических или фактологических вопросов.

Курс «История возникновения и развития математики» мог бы быть рекомендован для классов математического и естественно-математического профилей, курс «Математика и ее творцы» — для непрофильных классов и классов гуманитарного профиля, курс «Математика и цивилизация» — для классов естественно-научного, естественно-технического и гуманитарного профилей. В зависимости от конкретного профиля класса рекомендуется уделить основное внимание соответствующим темам курса — с тем, чтобы максимально удовлетворить интересам учащихся.

Другой возможный путь — синтез всех трех подходов. Он и взят как основной в рассматриваемом в настоящей книге элективном курсе, причем не «просто так», а с вовлечением в историко-математический контекст собственно математического. Остановимся на реализуемом в этом курсе *подходе*, «четвертом пути», чуть подробнее (собственно о программе курса и особенностях предлагаемого к нему учебного пособия отдельно см. в разделе 3).

В данный курс, наряду с культурно-историческим контекстом, включен сопутствующий *математический* материал, выстроенный, как правило, по линиям развития математических понятий и идей — например, относящийся к представлениям о числе или функциональной зависимости, к решению уравнений, исследованию функций и т. д. *Существенно*, что весь этот математический материал (доводимый до уровня конкретных примеров и задач) либо относится к основному содержанию школьных курсов математики, либо так или иначе связан с этим основным содержанием, иногда развивая его. Будучи рассматриваем на историческом фоне, конкретный математический материал позволяет реализовать в курсе *первый* подход — к истории математики как ***истории идей***.

Далее, важнейшей составляющей культурно-исторического контекста данного курса являются *конкретные биографические сведения* о жизни, окружении, математической и прочей личной и общественной деятель-

ности основных «действующих лиц» истории — математиков и других ученых, так или иначе связанных с возникновением и развитием рассматриваемых в данный момент (времени и хода разворачивания курса) математических концептов и реалий. В большинстве случаев такие сведения, *выделенные* так, чтобы не разбивать основную линию изложения, суть *комментарии* по основному ходу курса. Реализация этой *методической идеи*: «*изучение собственно предмета с сопутствующими комментариями*», — потребует специальных усилий при ведении курса. По замыслу, *учебное пособие* построено так, чтобы максимально упростить эту задачу для учителя (на то же направлена и *практическая часть* данного пособия — разделы 4–5). Когда же рассматриваются *ключевые фигуры* исторического процесса развития математики (такие, как *Джероламо Кардано, Галилео Галилей, Рене Декарт* и т. п.), то их «жизнь и судьба» рассматриваются отдельно и не как комментарии, а как часть основного хода курса. Такое его построение позволяет реализовать в курсе *второй* подход — к истории математики как ***истории людей***.

Наконец, культурно-исторический контекст данного курса не ограничивается «культурно-математической» компонентой, хотя она и основная. При рассмотрении «действующих лиц» и их личных историй раскрываются общественный фон, «ландшафт», в котором происходит действие. По мере возможностей, объясняется вклад личностей в историю в целом. Математическая жизнь «впечатывается» в историю цивилизации, и тем самым отчасти реализуется *третий* подход — как бы рисуется портрет «олицетворенной математики» на фоне эпохи.

Таким образом, рассматриваемый элективный курс имеет двоякую (целе)направленность: *с одной стороны*, на изучение исторических обстоятельств возникновения и развития тех или иных понятий *школьной* математики, идей и теорий, задач и методов их решения; *с другой же стороны* — на изучение рассматриваемых математических содержаний. Таковы ***ведущие идеи***, таков ***замысел курса***. Далее см. в разделе 3.

Литература

[1] АДАМАР Ж. *Исследования психологии процесса изобретения в области математики:* Пер. с франц. — М.: Сов. радио, 1970.

[2] АДЛЕР А. *Теория геометрических построений:* Пер. с нем. — Одесса: Матезис, 1924.

[3] АКРИТАС А. *Основы компьютерной алгебры с приложениями:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1994.

[4] АЛЕКСАНДРОВА Н. В. *Математические термины: Справочник.* — М.: Высшая школа, 1978.

[5] АМЕЛЬКИН В. В. *Дифференциальные уравнения в приложениях.* — М.: Наука, 1987.

[6] АНДРОНОВ И. К. *Математика действительных и комплексных чисел.* — М.: Просвещение, 1975.

[7] АРНОЛЬД В. И. *Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук: Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов.* — М.: Наука, 1989.

[8] АРНОЛЬД В. И. *Теория катастроф.* — М.: Знание, 1981.

[9] АРНОЛЬД В. И. *Теория катастроф.* — М.: Наука, 1990.

[10] АРНОЛЬД В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Наука, 1984.

[11] АРНОЛЬД В. И. *Математические методы классической механики.* — М.: Наука, 1974.

[12] БАШМАКОВА И. Г. *Диофант и диофантовы уравнения.* — М.: Наука, 1972.

[13] БЕЛАНОВ А. А. *Решение алгебраических уравнений методом Лобачевского.* — М.: Наука, 1989.

[14] БЕЛЛ Э. Т. *Творцы математики: Предшественники современной математики: Пособие для учителей:* Пер. с англ. — М.: Просвещение, 1979.

[15] БЕРНУЛЛИ Я. *О законе больших чисел:* Пер. с лат. — М.: Наука, 1986.

[16] БИРКГОФ Г. *Математика и психология:* Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1977.

[17] БЛЯШКЕ В. *Греческая и наглядная геометрия:* Пер. с нем. — В сб. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, вып.2 — М.: Физматгиз, 1957; вып.3 — М.: Физматгиз, 1958.

[18] БОГОЛЮБОВ А. Н. *Математики: Механики: Биографический справочник.* — Киев: Наукова думка, 1983.

[19] БОГОЛЮБОВ А. Н. *Роберт Гук.* — М.: Наука, 1984.

[20] БОГОЛЮБОВ А. Н. *Гаспар Монж.* — М.: Наука, 1978.

[21] БОГОЛЮБОВ Н. Н., МЕРГЕЛЯН С. Н. *Советская математическая школа.* — М.: Знание, 1967.

[22] БОЛТЯНСКИЙ В. Г. *Третья проблема Гильберта.* — М.: Наука, 1977.

[23] БОРОДИН А. И., БУГАЙ А. С. *Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник.* — Киев.: Радянська школа, 1987.

[24] БОРХЕС Х. Л. *Проза разных лет: Сборник:* Пер. с исп. — М.: Радуга, 1984.

[25] БОРХЕС Х. Л. *Письмена Бога:* Пер. с исп. — М.: Республика, 1992.

[26] БОРХЕС Х. Л. *Коллекция: Рассказы; Эссе; Стихотворения:* Пер. с исп. — СПб.: Северо-Запад, 1992.

[27] БОРХЕС Х. Л. *Сочинения в трех томах:* Пер. с исп. — Рига: Полярис, 1994.

[28] БУРБАКИ Н. *Очерки по истории математики:* Пер. с франц. — М.: ИЛ, 1963.

[29] Ван дер ВАРДЕН Б. Л. *Пробуждающаяся наука: Математики древнего Египта, Вавилона и Греции:* Пер. с нем. — М.: Физматгиз, 1959.

[30] ВЕЙЛЬ Г. *Симметрия:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1968.

[31] ВЕЙЛЬ Г. *Математическое мышление:* Пер. с англ. и нем. — М.: Наука, 1989.

[32] ВЕННИНДЖЕР М. *Модели многогранников:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.

[33] ВИГНЕР Е. *Этюды о симметрии:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.

[34] ВИЗГИН В. П. *«Эрлангенская программа» и физика.* — М.: Наука, 1975.

[35] ВИЛЕЙТНЕР Г. *История математики от Декарта до середины XIX столетия:* Пер. с нем. — М.: Наука, 1966.

[36] ВИЛЕЙТНЕР Г. *Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам:* Пер. с нем. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.

[37] ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ на XIX международной конференции в Женеве. — В сб. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, вып.1, М.: Физматгиз, 1957.

[38] ГАРДНЕР М. *Математические головоломки и развлечения:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.

[39] ГАРДНЕР М. *Математические досуги:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.

[40] ГАРДНЕР М. *Математические новеллы:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.

[41] ГЕЙЗЕНБЕРГ В. *Физика и философия:* Пер. с нем. — М.: ИЛ, 1966.

[42] ГЕЙЗЕНБЕРГ В. *Шаги за горизонт:* Пер. с нем. — М.: Прогресс, 1987.

[43] ГИЛЬБЕРТ Д., КОН-ФОССЕН С. *Наглядная геометрия:* Пер. с нем. — М.: Наука, 1981.

[44] ГИЛЬДЕ В. *Зеркальный мир:* Пер. с нем. — М.: Мир, 1982.

[45] ГИНДИКИН С. Г. *Рассказы о физиках и математиках.* — М.: Наука, 1985.

[46] ГЛЕЙЗЕР Г. И. *История математики в школе: Пособие для учителей.* — М.: Просвещение (IV–VI классы — 1981; VII–VIII классы — 1982; IX–X классы — 1983).

[47] ГНЕДЕНКО Б. В. *Очерки по истории математики в России.* — М.-Л.: Гостехиздат, 1946.

[48] ГНЕДЕНКО Б. В. *Курс теории вероятностей.* — М.: Наука, 1988.

[49] ГНЕДЕНКО Б. В. *Из истории науки о случайном (Из истории математических идей).* — М.: Знание, 1981.

[50] ГНЕДЕНКО Б. В. *Михаил Васильевич Остроградский.* — М.: Знание, 1984.

[51] ГУТЕР Р. С., ПОЛУНОВ Ю. Л. *Джон Непер.* — М.: Наука, 1980.

[52] ГУТЕР Р. С., ПОЛУНОВ Ю. Л. *От абака до компьютера.* — М.: Знание, 1975.

[53] ДААН-ДАЛЬМЕДИКО А., ПЕЙФФЕР Ж. *Пути и лабиринты: Очерки по истории математики:* Пер. с франц. — М.: Мир, 1986.

[54] ДАЛЬМА А. *Эварист Галуа, революционер и математик:* Пер. с франц. — М.: Наука, 1984.

[55] ДАНИЛОВ Ю. А. *Джон фон Нейман.* — М.: Знание, 1981.

[56] ДЕКАРТ Р. *Геометрия: С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта:* Пер. с франц. и лат. — М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[57] ДЕКАРТ Р. *Рассуждение о методе: С приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия:* Пер. с франц. — Л.: Гостехиздат, 1953.

[58] ДЕМИДОВ С. С. *У истоков современной алгебры.* — М.: Знание, 1971.

[59] ДЕМЬЯНОВ В. П. *Геометрия и марсельеза.* — М.: Знание, 1986.

[60] ДИОГЕН ЛАЭРТСКИЙ. *О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов:* Пер. с лат. — М.: Мысль, 1986.

[61] ДОБРОВОЛЬСКИЙ В. А. *Даламбер.* — М.: Знание, 1968.

[62] ДОРОФЕЕВА А. В., ЧЕРНОВА М. Л. *Карл Вейерштрасс.* — М.: Знание, 1985.

[63] ЖИЖЧЕНКО А. Б. *Алгебраическая геометрия в работах советских математиков.* — М.: Знание, 1969.

[64] ЖМУДЬ Л. Я. *Пифагор и его школа.* — Л.: Наука, 1990.

[65] ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ УЧЕНЫЕ. / *Под ред. С. П. Капицы.* — М.: Наука, 1980.

[66] ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ с древнейших времен до начала XIX столетия. / *Под ред. А. П. Юшкевича.* — М.: Наука, 1970 (Т.I: С древнейших времен до начала нового времени; Т.II: Математика XVII столетия; Т.III: Математика XVIII столетия.)

[67] КАЦ М., УЛАМ С. *Математика и логика: Ретроспектива и перспективы:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.

[68] КЕДЖОРИ Ф. *История элементарной математики:* Пер. с англ. — Одесса: Матезис, 1917.

[69] КЕПЛЕР И. *О шестиугольных снежинках:* Пер. с лат. — М.: Наука, 1982.

[70] КЛАЙН М. *Математика: Утрата определенности:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.

[71] КЛАЙН М. *Математика: Поиск истины:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.

[72] КЛЕЙН Ф. *Лекции о развитии математики в XIX столетии:* Пер. с нем. — М.: Наука, 1989.

[73] КЛЕЙН Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей*: В 2-х томах: Пер. с нем. — М.: Наука, 1987.

[74] КЛЕЙН Ф. *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени:* Пер. с нем. — М.: Наука, 1989.

[75] КНУТ Д. *Искусство программирования для ЭВМ:* Т.1: ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.

[76] КНУТ Д. *Искусство программирования для ЭВМ:* Т.2: ПОЛУЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.

[77] КОВАЛЕВСКАЯ С. В. *Избранные произведения.* — М.: Сов. Россия, 1982.

[78] КОКСТЕР Г. С. М. *Введение в геометрию:* Пер. с. англ. — М.: Наука, 1966.

[79] КОКСЕТЕР Г. С. М., ГРЕЙТЦЕР С.Л. *Новые встечи с геометрией:* Пер. с. англ. — М.: Наука, 1978.

[80] КОЛМОГОРОВ А. Н. *Математика в ее историческом развитии.* — М.: Наука, 1991.

[81] КОЛМОГОРОВ А. Н. *Математика — наука и профессия.* — М.: Наука, 1988.

[82] КОЛМОГОРОВ А. Н. *Основные понятия теории вероятностей.* — М.: Наука, 1974.

[83] КОЛЬМАН Э. *История математики в древности.* — М.: Физматгиз, 1961.

[84] ЗНАКОМЬТЕСЬ: КОМПЬЮТЕР; ЯЗЫК КОМПЬЮТЕРА; КОМПЬЮТЕР ОБРЕТАЕТ РАЗУМ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989; 1989; 1990.

[85] КОСНЕВСКИ Ч. *Занимательная математика и персональный компьютер:* Пер. с. англ. — М.: Мир, 1987.

[86] КОЧИНА П. Я. *Софья Васильевна Ковалевская.* — М.: Наука, 1981.

[87] КУДРЯВЦЕВ Л. Д. *Современная математика и ее преподавание.* — М.: Наука, 1980.

[88] КУЗНЕЦОВ Б. Г. *История философии для физиков и математиков.* — М.: Наука, 1974.

[89] КУРАНТ Р., РОББИНС Г. *Что такое математика?: Элементарный очерк идей и методов:* Пер. с. англ. — М.: Просвещение, 1967; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001; М.: МЦНМО, 2001 (3-е изд., испр. и доп.).

[90] КЫМПАН Ф. *История числа π:* Пер. с рум. — М.: Наука, 1971.

[91] ЛАКАТОС И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы:* Пер. с. англ. — М.: Наука, 1967.

[92] ЛЕВИН В. И. *Рамануджан.* — М.: Знание, 1968.

[93] ЛЕВИТИН К. *Геометрическая рапсодия.* — М.: Знание, 1984.

[94] ЛИВАНОВА А. М. *Три судьбы: Повесть о великом открытии.* — М.: Знание, 1975.

[95] ЛИСТИНГ И. Б. *Предварительные исследования по топологии:* Пер. с. нем. — М.-Л.: ГТТИ, 1932.

[96] НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ЛУЗИН: *Сб. статей.* — М.: Знание, 1983.

[97] МАЙСТРОВ Л. Е., ЭДЛИН И.С. *Чарльз Беббидж.* — М.: Наука, 1976.

[98] МАНТУРОВ О. В., СОЛНЦЕВ Ю. К. и др. *Толковый словарь математические терминов: Пособие для учителей.* — М.: Просвещение, 1965.

[99] МАНТУРОВ О. В., СОЛНЦЕВ Ю. К. и др. *Математика в понятиях, определениях и терминах: Пособие для учителей.* — М.: Просвещение (Ч. 1 — 1978; Ч. 2 — 1982).

[100] МАРКУШЕВИЧ А. И. *Очерки по истории теории аналитических функций.* — М.-Л.: Гостехиздат, 1951.

[101] МАТВИЕВСКАЯ Г. П. *Рене Декарт: Книга для учащихся.* — М.: Просвещение, 1987.

[102] МАТВИЕВСКАЯ Г. П. *Альбрехт Дюрер — ученый.* — М.: Наука, 1987.

[103] МАТВИЕВСКАЯ Г. П. *Рамус.* — М.: Наука, 1981.

[104] МАТЕМАТИКА XIX ВЕКА. / *Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.* — М.: Наука, 1981.

[105] МАТЕМАТИКИ О МАТЕМАТИКЕ: *Сборник статей.* — М.: Знание, 1982.

[106] МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ. / *Гл. ред. Ю. В. Прохоров.* — М.: Большая российская энциклопедия, 1995.

[107] МОСТЕЛЛЕР Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1985.

[108] НЕЙГЕБАУЕР О. *Точные науки в древности:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1968.

[109] НЕЙГЕБАУЕР О. *Лекции по теории античных математических наук: Т.I: Догреческая математика:* Пер. с нем. — М.-Л.: ОНТИ, 1937.

[110] НИКИФОРОВСКИЙ В. А. *Из истории алгебры XVI–XVII вв.* — М.: Наука, 1979.

[111] НИКИФОРОВСКИЙ В. А. *Великие математики Бернулли.* — М.: Наука, 1984.

[112] НЬЮТОН И. *Всеобщая арифметика:* Пер. с лат. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

[113] НЬЮТОН И. *Математические начала натуральной философии:* Пер. с лат. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.

[114] НЬЮТОН И. *Математические работы:* Пер. с лат. — М.-Л.: ОНТИ, 1937.

[115] ОБ ОСНОВАНИЯХ ГЕОМЕТРИИ. *Сборник.* — М.: ГИТТЛ, 1956.

[116] ПЕЙТГЕН Г.-О., РИХТЕР П. *Красота фракталов: Образы в комплексных динамических системах:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1994.

[117] ПИДОУ Д. *Геометрия и искусство:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.

[118] ПОЙА Д. *Математика и правдоподобные рассуждения:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1975.

[119] ПОЙА Д. *Как решать задачу: Пособие для учителей:* Пер. с англ. — М.: Учпедгиз, 1961.

[120] ПОЙА Д. *Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1976.

[121] ПОСТНИКОВ М. М. *Теорема Ферма: Введение в теорию алгебраических чисел.* — М.: Наука, 1978.

[122] ПОСТНИКОВ М. М. *Введение в теорию алгебраических чисел.* — М.: Наука, 1982.

[123] ПРУДНИКОВ В. Е. *Пафнутий Львович Чебышев.* — Л.: Наука, 1976.

[124] ПУАНКАРЕ А. *О науке:* Пер. с франц. — М.: Наука, 1990.

[125] РАДЕМАХЕР Г., ТЕПЛИЦ О. *Числа и фигуры:* Пер. с нем. — М.: Наука, 1966.

[126] РЕНЬИ А. *Трилогия о математике:* Пер. с венг. — М.: Мир, 1980.

[127] РИД К. *Гильберт: С приложением обзора Германа Вейля математических трудов Гильберта:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1977.

[128] РЫБНИКОВ К. А. *Возникновение и развитие математической науки: Пособие для учителей.* — М.: Просвещение, 1987.

[129] СЕКЕЙ Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.

[130] СЕРПИНСКИЙ В. *Что мы знаем и чего не знаем о простых числах:* Пер. с польск. — Л.: Физматгиз, 1963.

[131] СЕРПИНСКИЙ В. *О теории множеств:* Пер. с польск. — М.: Просвещение, 1966.

[132] СОДРУЖЕСТВО НАУК И ТАЙНЫ ТВОРЧЕСТВА. *Сборник.* — М.: Искусство, 1968.

[133] СТРОЙК Д. Я. *Краткий очерк истории математики:* Пер. с нем. — М.: Наука, 1984.

[134] СТЮАРТ Я. *Концепции современной математики:* Пер. с англ. — Минск: Вышейшая школа, 1980.

[135] СУШКЕВИЧ А. К. *Основы высшей алгебры.* — М.-Л.: ОНТИ, 1937.

[136] ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. / *Под ред. А.П. Юшкевича.* — М.: Просвещение, 1977.

[137] ТУМАКОВ И.М. *Анри Леон Лебег.* — М.: Наука, 1975.

[138] УАЙТХЕД А.Н. *Избранные работы по философии:* Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1990.

[139] УЗОРЫ СИММЕТРИИ. / *Под ред. М.Сенешаль и Дж.Флека:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.

[140] УСПЕНСКИЙ В.А. *Теорема Геделя о неполноте.* — М.: Наука, 1983.

[141] ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС: ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ. — М.: Просвещение (7–8 классы — 1978; 9 класс — 1979; 10 класс — 1980).

[142] ФОМЕНКО А.Т. *Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире.* — М.: Изд-во МГУ, 1992.

[143] ФРЕЙМАН Л.С. *Творцы высшей математики.* — М.: Наука, 1968.

[144] ФРОЙДЕНТАЛЬ Г. *Математика как педагогическая задача: Пособие для учителей:* Пер. с нем. — М.: Просвещение (Ч.I — 1982; Ч.II — 1983).

[145] ХАЛМОШ П.Р. *Николай Бурбаки:* Пер. с англ. — В сб. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, вып.5 — М.: Физматгиз, 1960.

[146] ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ. / *Под ред. А.П. Юшкевича.* — М.: Просвещение, 1976.

[147] ЦЕЙТЕН Г.Г. *История математики в древности и в средние века:* Пер. с нем. — М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[148] ЦЕЙТЕН Г.Г. *История математики в XVI и XVII веках:* Пер. с нем. — М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[149] ШУБНИКОВ А.В. *У истоков кристаллографии.* — М.: Наука, 1972.

[150] ШУБНИКОВ А.В., КОПЦИК В.А. *Симметрия в науке и искусстве.* — М.: Наука, 1972.

[151] ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ ЮНОГО МАТЕМАТИКА. / *Сост. А.П. Савин.* — М.: Педагогика-Пресс, 1994.

[152] ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. / *Под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина.* Кн.I: Арифметика. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951; Кн.II: Алгебра. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951; Кн.III: Функции и пределы. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1952; Кн.IV: Геометрия. — М.: Физматгиз, 1963; Кн.V: Геометрия. — М.: Наука, 1966.

[153] ЮШКЕВИЧ А. П. *История математики в средние века.* — М.: Физматгиз, 1961.

[154] ЮШКЕВИЧ А. П. *История математики в России до 1917 г.* — М.: Наука, 1968.

[155] ЮШКЕВИЧ А. П. *Леонард Эйлер.* — М.: Знание, 1982.

[156] ЮШКЕВИЧ А. П. *Из истории возникновения математического анализа.* — М.: Знание, 1985.

[157] ЮШКЕВИЧ А. П., КОПЕЛЕВИЧ Ю. Х. *Христиан Гольдбах.* — М.: Наука, 1983.

[158] ЯГЛОМ И. М. *Герман Вейль.* — М.: Знание, 1967.

(Приведенный список литературы по необходимости довольно эклектичен. Он далеко не претендует на полноту, но лишь на некоторое удовлетворение целям вышеуказанных программ. Заметим, что в этом списке очень выборочно представлены многочисленные относящиеся к нашей тематике брошюры общества «Знание» — серия «Математика, кибернетика». Кроме биографических брошюр, интерес здесь представляют сборники типа «Проблемы современной математики», содержащие разнообразный как методологический, так и методический материал — из таких сборников указан только [105]. Аналогично обстоит дело с книгами из серии «Люди науки» издательства «Просвещение» — мы ограничились указанием на брошюру [101]. То же относится и к брошюрам серии «Популярные лекции по математике» издательства «Наука» (за исключением книжки [140]). Кроме того, мы не приводим ссылок на соответствующие материалы, публиковавшиеся в журналах «Математика в школе», «Квант» и приложении к нему, «Природа», вновь издаваемые журналы «Математическое просвещение», «Математическое образование» и др., иначе библиография непомерно увеличилась бы.)

Раздел 2. ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ И КУЛЬТУРНО-ИСТОРИЧЕСКИЙ ДИСКУРС

Глава 2.1. Три тезиса о профильных классах и концепция Мишеля Серра

Нормальные герои
Всегда идут в обход.

Айболит 66

Начнем с трех не совсем общепринятых тезисов. **Первый**: в условиях «всеобуча» в наиболее неблагоприятных условиях в школе, особенно в средних классах, находятся «способные» учащиеся, а отнюдь не слабые, плохоуспевающие. Именно способным часто не хватает учительского внимания и поддержки, а также и среды общения, адекватной их интересам и возможностям. А в таких условиях к старшим классам способные превращаются в обыкновенных «серых», а то и вовсе в неблагополучных учеников. Вывод: если мы хотим, с одной стороны, «поддерживать на высоте» интеллектуальный потенциал страны, а с другой — дать возможность каждому ребенку, если не оптимально, то хоть как-нибудь развить свои способности, то нужно приложить специальные, особые усилия. Но какие?

Ребенка образовывает, воспитывает среда и учитель. И если брать по минимуму, то возможный выход — собирать способных учеников в классы, где лучшие учителя, энтузиасты своего дела, помогут создать особую атмосферу — культа знаний и культуры, взаимопомощи и взаимообучения, а по максимуму — и творчества, творческого общения.

Тезис второй. Обычно считается, что школьники склонны преувеличивать свои способности и возможности; учителя же, по мнению школьников, часто недооценивают их. Второе нередко бывает справедливо, а вот насчет первого... Наш опыт в Черноголовском Центре, а также опыт физико-математической школы-интерната (ФМШ) при МГУ, показывают, что часто (чаще!) школьники недооценивают себя, свои способности, зачастую даже не подозревают о них. Конечно, школа предоставляет учащимся известный набор «форм работы», направленных на решение этой проблемы: кружки, факультативы, олимпиады. Но уже «оглупленные» предыдущим своим опытом (см. тезис первый) и недооценивая себя (!), многие в принципе способные школьники проходят мимо всего этого. Вот тут надо было бы найти достаточно ненавязчивые, необязательные, безотносительные к собственно учебному процессу формы работы со школьниками, открытые для всех и помогающие узнать свои способности, раскрыть свои возможности. Какие?

Это могут быть летние школы (типа школ ФМШ при МГУ) или лагеря (по типу лагерей Малой академии наук Крыма), а также открытые испытания, диагностирующие не знания-умения-навыки, а элемен-

тарные способности — уровня, например, стандартных американских испытаний типа SAT (Stanford Achievements Test), GRE (Graduate Record Examination) или даже AMHSE (Annual Mathematics High School Examination).

Такие испытания, которые особенно удобно (и психологически наиболее приемлемо для школьников) проводить в компьютеризированной форме, с одной стороны, должны быть «ни к чему не обязывающими» (как и обучение в летней школе), а с другой стороны, результаты таких испытаний как раз могут служить достаточно объективной основой для формирования профильных классов. (Отметим, что, по крайней мере по отношению к математике, ни школьная успеваемость, ни обычные экзаменационные отметки не могут служить надежным критерием отбора в профильные классы, ибо на эти оценки накладывается масса посторонних факторов, которые, особенно в свете второго из наших тезисов, мы как раз должны исключить.)

Теперь самое время обратиться к специфике собственно «профильного физмата», к особенностям двухлетнего обучения в этом классе.

Прежде всего, заметим, что многие родители, да и некоторые школьники тоже, считают, что «физмат» — это «трамплин» в вуз. Это не так. Чтобы подготовить таких школьников к конкурсным экзаменам, достаточно полугодовых курсов репетиторского типа, а с классом нечего и «огород городить»... Первая задача, которую мы ставим — научить (и приучить!) школьников работать, в том числе и самостоятельно, — в смысле воспринимать, понимать, созидательно перерабатывать (по-английски это звучит как «проявлять креативные способности» — чрезвычайно важное качество) — идеи, знания, информацию. При этом приходится отучать школьников от школярского, рецептурного подхода к учению, к решению задач, что весьма и весьма не просто.

Вторая задача — дать учащимся представление о математике, физике, об их взаимодействии — истинное представление, которое весьма трудно извлечь из нынешних учебников.

Третья задача относится именно к математике — речь идет о формировании общей математической культуры — культуры логических рассуждений, эвристических подходов к проблемам и задачам. Можно сказать и иначе — речь идет о математике, как части общечеловеческой культуры. Здесь уместно привести слова Германа Вейля: «*Музыка, математика, поэзия и мифотворчество — наиболее присущие человеку области его творческой деятельности, в которых проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии*» (1929 г.). Ну, а раз речь идет о физико-математическом классе, не обойтись и без хрестоматийно-парадоксального высказывания Нобелевского лауреата по физике Юджина Вигнера из его статьи «*Непостижимая эффективность математики в естественных науках*» (1959 г.) — о том, что математика — «*...это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем*»!

В какой-то степени обе последние задачи удается решить. Что касается математики, то школьники через некоторое время хотя бы отчасти начинают воспринимать красоту математических конструкций и рассуждений, изящество математических моделей, etc. А понимая, что же такое математика, физика, школьники уже гораздо более осознанно делают выбор своего дальнейшего пути в образовании. Характерно, что к концу XI класса у учащихся резко повышается уровень притязаний — вместо вузов «среднего» уровня многие ориентируются уже на ведущие — МГУ, МФТИ...

Теперь о поступлении в вузы. Если со школьниками удается решить первую из сформулированных задач, т.е. воспитать работоспособность, то с ними не составляет особого труда и «проработать» ту часть школьной и «околошкольной» математики, которую именуют конкурсной. Причем, наряду с минимально необходимым тренингом, в этом классе обращается особое внимание на демонстрацию глубоких математических идей, довольно часто скрытых в конкурсных задачах. Эта система подготовки оправдывает себя.

Вот теперь в самый раз обратиться к анонсированному в начале **третьему тезису**. Он как-то естественно привязывается к приведенному выше высказыванию Г. Вейля и может быть сформулирован в духе Ю. Вигнера, как утверждение о «необыкновенной важности гуманитарного образования в физико-математических классах». Роль гуманитарной компоненты культуры для «технократов» хорошо понимают, скажем, в Японии. Эмоционально-эстетическое восприятие окружающего мира — большое подспорье для творчества в любой области, будь то математика, физика или техника.

Конечно, нужно было бы вести речь не только о традиционных для школы «гуманитарных предметах» — о литературе, истории, языках, — но и об эстетическом воспитании в широчайшем плане, добавляя к вейлевским поэзии и музыке искусство во всех его ипостасях. Но если в разрешении проблем, вытекающих из первых двух тезисов, мы, хотя бы отчасти, можем преуспеть, то насчет гуманитарного образования в физико-математических классах, даже в рамках литературы, пока утешительного мало.

Основная «помеха» здесь состоит, пожалуй, в несоответствии эмоционального настроя учителей-гуманитариев и «физико-математических» школьников. Огромный вред приносит иногда явно формулируемое мнение о том, что «Может быть, в физико-математических классах и не нужна ... (литература ли, история) в полном объеме?» — Нужна, да еще как! «Нигилистический» настрой школьников учитель, даже если это учитель (гуманитарий) высочайшего класса, сможет преодолеть только при наличии поддержки со стороны преподавателей профилирующих предметов. Это утверждение подтверждает многолетний опыт ФМШ при МГУ, а также и опыт, например, мехмата МГУ (достаточно привести пример

академиков П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова — математиков с мировыми именами, очень много сделавших для эстетического воспитания и школьников, и студентов). Можно вспомнить и то, как в середине 60-х математики в ФМШ читали школьникам стихи из забыто-запретного в то время «серебряного века» (тут можно процитировать академика, физика-теоретика В. Е. Захарова: «*Если кто приучается читать стихи, тот уже никогда не станет ... плохим человеком*»), — и вслед за тем поменялось и «школьническое» отношение к литературе вообще.

Заметим еще — нужно четко понимать, что последние два года обучения в школе по отношению к гуманитарному образованию, к эстетическому воспитанию для большинства школьников — это ситуация «Сейчас или никогда!». И это эдгаровское «Никогда» было бы очень печальным исходом.

Обоснование третьего тезиса

Вернувшись ко всем трем *тезисам*, заметим, что *первый* подсказывается актуальной практикой обучения, *второй* вытекает из всего нашего опыта, а вот как обосновать *третий тезис* — о важности гуманитарного образования в классах естественно-научного профиля? — Для нас он тоже был продиктован опытом, проистекал из него. Мы имеем в виду как собственный опыт (учения и обучения других), так и опыт, можно сказать, лучших учебных заведений и лучших учителей/преподавателей. Но сравнительно недавно стало понятно психолого-педагогическое и даже психолого-физиологическое обоснование нашего третьего тезиса.

Речь идет о концепции лево/правополушарного мышления и сопутствующих важных с точки зрения общего развития и образования концептах: психологического фактора *поисковой активности* (1980-е гг., В. С. Ротенберг и В. В. Аршавский, Россия[1]) и антагонистического фактора *обученной* (*выученной*) *беспомощности* (1990-е гг., М. Е. Селигман, США). Здесь не место подробно обсуждать эти концепции, однако в силу их сугубой важности для профильного обучения математике мы кратко обрисуем ситуацию[2].

Если изначально заложенное в человеке *поисковое поведение*[3] тормозится, что чаще всего происходит при дефиците эмоциональных контактов в раннем детстве, то это часто приводит к одностороннему развитию ребенка. Здесь слово «одностороннее» имеет вполне определенный

[1] См. Ротенберг В. С., Аршавский В. В. Поисковая активность и адаптация. — М., 1984.

[2] Далее используются материалы аналитического доклада автора «*Теоретические и практические основы развивающего обучения математике в основной школе*», М., 2002.

[3] *Поисковая активность* понимается как активность, направленная на изменение ситуации, расцениваемой как неприемлемая (или своего отношения к ней), при отсутствии определенного прогноза результатов своей активности, но при постоянном учете этих результатов. Яркий пример: *активное* решение математической задачи.

психофизиологический смысл. Еще в 1950-е гг. психофизиологи экспериментально обнаружили функциональную асимметрию мозга. Исследования последних десятилетий позволили довольно точно установить специфические функции левого и правого полушарий. В самом общем виде гипотеза, подтверждаемая многими экспериментами, выдвинутая в 1990-х гг. В. Ротенбергом гласит: левое полушарие оперирует с информацией, сводящейся к *однозначному* контексту — отвечает за вербальное поведение, логическое (и математическое, а точнее — любое однозначное) мышление. Правое же полушарие способно целиком воспринимать *многозначный* контекст, интегрируя все многочисленные и даже противоречивые связи между объектами окружающего мира, оперируя с цельными образами окружающего. Совсем грубо, левополушарное мышление есть мышление логическое, однозначное, правополушарное есть мышление образное, многозначное.

Правое полушарие отвечает также за формирование многозначного «образа Я», соединяющего в себе все огромное множество представлений человека о самом себе и о своих отношениях к окружающему — миру, социуму. Оно ответственно за адаптацию человека к окружающему, и если образное восприятие оказывается нарушенным, возникает фактически клиническое состояние дезадаптации.

«Что же приводит к неполноценности образного мышления? Ведь человек рождается с высокими потенциальными предпосылками к такому мышлению. В раннем детстве преимущество в развитии на стороне правого полушария, и лишь постепенно и с большим трудом формируется доминантность логического мышления. И это вполне объяснимо — прежде всего младенцу необходимо воспринять мир целостно, объемно, непротиворечиво, и прежде всего он должен научиться реагировать на неопределенные, многозначные сигналы этого мира. Потому что эмоциональные реакции близких, любовь родителей — это многозначный контекст. Мы уже писали, что никаким анализом нельзя исчерпывающе определить, почему и как человек любит или не любит другого человека.

Но правое полушарие не только предуготовано к восприятию многозначности эмоциональной экспрессии — оно развивается и совершенствуется в своих функциях под влиянием этой экспрессии близких людей и под влиянием собственной эмоциональной экспрессии ребенка, проявляющейся в его двигательном, невербальном поведении. И поэтому дефицит эмоциональных контактов <...> и ограниченность эмоционального самовыражения <...> приводят к недоразвитию образного мышления, неспособности к созданию многозначного контекста, несформированности образа „Я“. А потом ребенок начинает развиваться в условиях все более активного давления нашей левополушарно ориентированной цивилизации, и в школе у него всеми способами активируют исключительно логическое мышление, и компьютерные игры продолжают эту тенденцию. И если уже сложившиеся эмоциональные

контакты и художественные интересы и увлечения не противодействуют этим тенденциям, то образное мышление все более подавляется и возникают предпосылки для невротических и психосоматических расстройств». (Ротенберг, 2001[1])

Таким образом, эмоциональные отношения, многозначные по своей природе, способствуют развитию многозначного, образного мышления. Напротив, по данным ведущих психоаналитиков у больных с психическими и психосоматическими заболеваниями выявляется систематический дефицит полноценных эмоциональных контактов в раннем детстве. *Вся западная цивилизация и система образования также способствуют развитию левого полушария в ущерб правому и недостаточному формированию образного мышления.*

«*Если способность к формированию многозначного контекста не развивается и тем самым утрачены все преимущества этого способа адаптации к миру, естественной в нем интеграции — человек вынужден прибегать к другим механизмам адаптации. Он пытается восполнить свой дефект за счет все более выраженных усилий по упорядочиванию, структурализации действительности, т.е. за счет активации левого полушария. <...> А в дополнение ко всему и сам человек, и все его окружение подталкивают левое полушарие к избыточной активности: убедившись, что ребенку или подростку легче даются точные науки, чем все то, что требует образного мышления, близкие вместо того, чтобы попытаться восполнить дефицит, начинают варварски эксплуатировать именно те способности и тенденции, которые и без того избыточны. И так до тех пор, пока левое полушарие, не уравновешенное трезвостью и жизненностью правого, не отрывается окончательно от реальности и не начинает парить в безвоздушном пространстве бредовых идей и галлюцинаций. Когда все поисковое поведение человека базируется только на возможностях однозначного контекста, он становится самодовлеющим и сам себя подстегивает*» (там же).

Мы полагаем, что проделанный за последние десятилетия анализ и вытекающие из него выводы психологов и психофизиологов, касающиеся деформации в развитии функций — главным образом, логической (левополушарной) за счет образной (правополушарной), — заслуживают самого внимательного отношения со стороны педагогической психологии и непосредственного учета при построении любых программ развивающего обучения, в том числе и профильного. Адаптация к окружающему требует формирования полноценной поисковой активности, и без адекватного отношения школы, учителей к этой проблеме многие и многие школьники обречены на дезадаптацию, на формирование *выученной беспомощности.*

Отметим, что особенно это относится к математике и в самой большой степени — к учащимся, выбравшим углубленное изучение данного предмета. Математика как фундаментальная наука и как учебный предмет

[1]Здесь и далее приведены ссылки на работу В. Ротенберга «*Образ Я*», которую можно найти в Интернете. С начала 1990-х гг. Вадим Ротенберг (г. р. 1941) — профессор в Тель-Авиве.

подразумевает творческую деятельность, а таковая отнюдь не будет развита без специального внимания к образному восприятию и мышлению, к формированию *эмоционально-личностного* отношения к предмету.

В. С. Ротенберг описывает принципы воспитания и обучения с учетом фактора поисковой активности почти в терминах школы Л. С. Выготского. «*С раннего детства необходимо формировать потребность в поиске, при котором сам процесс активного изменения ситуации не менее притягателен для человека, чем даже самый желанный результат деятельности. Удовольствие от процесса преодоления препятствия может стать мощным стимулом поиска, но для этого нужно, чтобы ребенок почувствовал вкус преодоления. А для этого задачи должны быть не слишком легки и не чересчур сложны: на каждом этапе развития они должны чуть-чуть превосходить наличные возможности ребенка, вынуждая его для достижения успеха все время как бы „становиться на цыпочки“. И поощряться должен не столько конечный результат, сколько эта готовность не отступать в случае неудачи, все начинать сначала, отыскивать все новые способы решения проблемы, пусть даже недостаточно эффективные*» (Вопр. психол., 1989, № 6).

Противоположный поисковой активности интрапсихический фактор, внешне выражающийся как отказ от поиска в тех или иных проблемных ситуациях, называется *обученной* (*выученной*) *беспомощностью*. Наименование связано с тем, что отказ от поиска не присущ человеку (и животным, на которых был открыт феномен обученной беспомощности) изначально, а приобретается (может приобретаться) в результате разнообразного негативного опыта. Так, в младенчестве недостаток эмоционального общения со взрослыми может привести к обученной эмоциональной беспомощности, что на следующем этапе приводит к задержке развития эмоционально-волевой сферы и, как следствие, к отставанию в развитии мотивационной сферы, навыков общения и даже речи. К обученной беспомощности приводит и авторитарное воспитание в детстве, и гиперопека родителей.

В более старшем возрасте ребенок (подросток, взрослый), получая опыт обученной беспомощности, не обязательно его генерализует, относит ко всем видам своей деятельности — беспомощность компенсируется в других областях деятельности, в которых сохраняется и узко направленная поисковая активность. Ребенку младшего возраста какая-либо компенсаторная деятельность вообще может быть незнакомой, его обученная беспомощность генерализуется, вытесняется по Фрейду в бессознательное и приводит либо к неврозам, либо к психосоматической симптоматике.

Конечно, в таком случае развитие личности в процессе обучения становится проблематичным — здесь нужен уже не педагог, а врач. И не следует допускать обученную беспомощность до подобной стадии, и не следует в процессе обучения ни в какой мере провоцировать ее. Это — азы (вернее, оборотная сторона) развивающего обучения.

Спрашивается, при чем здесь гуманитарное образование? Учить поисковому поведению, не допускать (или, по крайней мере, компенсировать) обученную беспомощность — и дело с концом. — А вот здесь дело в том, что гуманитарное образование, способствуя развитию *образного мышления*, не только не позволяет доминировать одностороннему, только левополушарному мышлению, но и существенно способствует развитию *творческого мышления*, что весьма существенно, на наш взгляд, при профильном обучении (и не только математике!). Дальнейшее обсуждение в этом направлении увело бы нас слишком далеко от конкретного предмета данного пособия — рассматриваемого элективного курса[1], — и мы его опускаем.

Укажем напоследок еще на неожиданную (на первый взгляд) поддержку тезиса о роли гуманитарного образования в образовании математическом и естественно-научном, которую он получает со стороны философии и культурологии[2] — в лице концепции (и теории) *взаимосвязанности естественно-научного и гуманитарного знаний*, которая была в 1970–80 гг. выдвинута и развита *Мишелем Серром*. Его взгляды стоит рассмотреть чуть подробнее — на наш взгляд, они заслуживают внимания со стороны математической общественности, тем более, что М. Серр по одному из своих образований математик, а его труды в настоящее время (2003) на русский не переведены[3].

Мишель Серр (Michel Serres, г. р. 1930) — французский философ, культуролог, историк науки, членом Французской академии «Сорока бессмертных»[4]. Главное утверждение его концепции состоит в том, что существует переход между точными и гуманитарными науками о человеке (и о его существовании знал еще Платон). Однако переход этот не очевиден и не прост. Он подобен узкому ледяному лабиринту, соединяющему Атлантику и Тихий океан — «северо-западному проходу»[5]. Преодолеть его может лишь тот, кто способствует коммуникации, связям между двумя ветвями современной культуры. Для осуществления подобной коммуникации Серр выдвигает метод «неупорядоченного энциклопедизма». Он исходит из неразделимости искусства, науки, мифологии, из единства пространства-времени культуры, где все творцы, деятели науки и собственно культуры — наши современники.

---

[1] Хотя имело бы к нему весьма непосредственное отношение — вот такой парадокс!

[2] На всякий случай отмечу: автор придерживается общепринятой точки зрения о вхождении науки в поле культуры, понимаемой, конечно, в широком смысле.

[3] Ниже мы используем, главным образом, изложенное в книге: Н. Б. Маньковская, Эстетика постмодернизма. — СПб.: Алетейя, 2000 — с. 199-219.

[4] Эта Академия была основана кардиналом Ришелье в 1635 г. и объединяла видных представителей культуры, науки и политических деятелей Франции. Каждый из 40 ее членов занимает свое кресло пожизненно. В число «Сорока бессмертных» в разное время входили Д'Аламбер, Лаплас, Лагранж, Анри Пуанкаре...

[5] Так называемый Nord-West Passage; он был найден около ста лет тому назад после долгих поисков. Так же называется и один из трактатов Серра (1980).

Серр считает эстетическое знание более комплексным, полным и гибким по сравнению с естественнонаучным (а эстетику называет своего рода гуманитарной общей физикой!). Философия, литература, миф, сказка способны увидеть горизонты, сегодня еще не доступные физике и математике, и тем самым гуманитарные науки стимулируют научный прогресс. При этом эстетика не стремится занять все пространство культуры, но дает ее стереоскопическое видение. Тремя осями современного научного духа Серр считает неевклидово мышление в геометрии, неньютоновский мир в механике, некартезианское (отличное от декартова) мышление в эпистемологии (теории познания).

Не будем дальше углубляться в эти, сегодня все еще экзотические, но заведомо интересные и, скорее всего, плодотворные взгляды философа. Для нас существенна их симптоматичность: который раз ставится вопрос о взаимоотношениях «физики и лирики», как и у нас в «третьем тезисе». Ограничимся тем, что «лирическая история математики», к коей можно причислить рассматриваемый элективный курс, в каком-то отношении может считаться отражением поиска коммуникации между математикой и гуманитарными науками (уж чего-чего, а «неупорядоченного энциклопедизма» в этом курсе достаточно!).

Глава 2.2. NOTA BENE: СТИЛЬ ИЗЛОЖЕНИЯ!

...Ибо речи тогда лишь волнуют нас, если они пышны, звучны, умело закручены, по-цицероновски великолепны, полны сочных образов, разящих эпитетов и завершаются крещендо...

Алехо Карпентьер

В этой и следующих главах речь идет о разработанном нами *проекте курса алгебры и математического анализа*, о котором говорилось в конце «*Предисловия*» (с. 6). Однако большая часть высказываемых положений так или иначе переносится и на рассматриваемый элективный курс.

Основное содержание курса алгебры и анализа вместе с его *программой* складывались в единое целое и оформлялись в некоторый итоговый вид *постепенно* — с каждым вновь преподаваемым курсом. Всякий раз особое внимание уделялось тем моментам, которые работали бы на *адекватную целям* УМО[1] «интересность», стимулирующую развитие интересов, активное восприятие материала учащимися, их побуждение к самостоятельной и активной познавательной деятельности. Постепенно вырабатывалось то, что я называю **стилем** — стилем даже не преподавания, а *обучающе-воспитывающего двусторонне-активного диалога* преподавателя (лектора, учителя) с учащимися[2], **стилем общения и взаимодействия обучающего и обучаемых**.

Вообще-то, как правило, приходится говорить о *двух* стилях: *стиль преподавания, преподнесения материала* (теории, задач) — стиль, так сказать, ***объективный***; и *стиль «учительствования»*, форма и тон общения учителя со школьниками[3] — это уже стиль ***субъективный***, зависящий и от личности, и от квалификации, и от педагогического (и житейского!) опыта учителя, и от того, кто учил самого учителя, от того, как учитель начинал «учительствовать». На субъективный стиль преподавания влиять трудно, если вообще возможно. На объективный стиль можно-таки повлиять — в (хороших!) методических пособиях для учителей такая попытка и предпринимается[4].

---

[1] Т. е. *углубленного математического образования*.

[2] Лекционный урок в классе или «потоковая» лекция для двух, трех или пяти классов (в одногодичных и двухгодичных потоках в ФМШ при МГУ) почти всегда строились как диалог; конечно, реальная эффективность подобного «обучающе-воспитывающего» взаимодействия пришла только с опытом, и, опять-таки, диалогичность общения на лекциях-уроках отнюдь не возводилась в абсолют — что называется, «раз на раз не приходится»!

[3] Менторский или строгий тон общения, форма обращения с учащимися, форма обсуждения теории и решения задач, etc.

[4] Я имею в виду именно *настоящие методические пособия*, затрагивающие и *концептуальные*, и *методологические* вопросы, а не «КдУ» («Книги для учителя») с поурочными разработками (типа «***Что, где, когда, сколько***?» — вместо вопросов «***Зачем, почему, как***?»!) или пособия «Из опыта работы». Подобные книги, разумеется, полезны (в случае их достаточной добротности), однако, на мой взгляд, лишь в малой степени оказывают влияние на формирование собственного учительского стиля.

В данном случае в самих учебных текстах по рассматриваемому курсу предпринята попытка явным образом представить предполагаемый (и ненавязчиво предлагаемый!) стиль преподавания предмета, попытка показа почти диалогового стиля обучения. Понятно, что *эффективный* обучающий диалог не может быть построен на «пустом месте». Укажем на основные аспекты процесса изучения/преподавания данного курса, способные привести к активному диалогу и учению с интересом; изложим их по пунктам.

1. *Формулирование с самого начала* (математических) *целей, перспектив.* Скажем, если речь идет об исследовании функций, то нужно объяснить, *что именно* — какие свойства функций — *мы исследуем.* Весьма полезным бывает «*обзор всего сверху*», без деталей, но с определенными психологическими напутствиями; это как бы рекогносцировка будущего поля исследований[1], и некоторая терапия, что ли.

2. Далее, по возможности, *сразу нужно объяснить, а* ***почему*** *мы интересуемся теми или иными понятиями и свойствами.* Скажем, введение числовых тригонометрических функций[2] преследует отнюдь не последующее практикование в тригонометрических преобразованиях или в решении тригонометрических уравнений; введенные для описания вращательного движения, тригонометрические функции являются истинным фундаментом *теории колебаний*[3].

3. Развитие теории математиками–профессионалами всегда *мотивировано* — практическими, иногда эстетическими или даже эмоциональными причинами[4]. На наш взгляд, такая ***внутренняя мотивация непременно должна присутствовать и при углубленном изучении теории*** (***математики***) ***в старших классах***. В учебном процессе понятия (определения), свойства (теоремы), их доказательства НЕ ДОЛЖНЫ появляться «*с потолка*», «*с бухты-барахты*» (в сопровождении слов типа: «***А давайте*** *рассмотрим* (*определим*) ***то-то*** *и сделаем с этим* ***...что-то*** *...*»). Немотивированное преподнесение нового материала НЕ способствует его активному усвоению, НЕ активирует ассоциативные связи между отдельными «элементами знаний», фактически

---

[1] Здесь, по-моему, уместно привести слова Дж. Гэлбрэйта: «*В отличие от романа или пьесы, преждевременное раскрытие замысла не является недостатком*» «учебного текста» (у Гэлбрэйта — «*научного исследования*»). Чем раньше учащийся начнет знакомиться с соответствующей новой научной терминологией, сначала даже на «назывательном» и интуитивном уровне, тем прочнее и проще произойдет овладение соответствующими понятиями впоследствии.

[2] **Не геометрических** функций угла — с ними-то как раз все понятно!

[3] Не говоря об иных приложениях в качестве *специальных* (круговых) *функций.*

[4] Мы рассматриваем только *внутреннюю*, так сказать, *духовную мотивацию* — в удержании интереса к предмету исследования, в непроизвольном учете внутренних мотивов при развитии теории, при введении тех или иных понятий, определений, при отыскании свойств и формулировке теорем, etc. «Внешняя» мотивация — типа «материального стимулирования» — это нечто другое.

подавляет такое важное для человеческого мышления (особенно «математического», если таковое как-то возможно «выделить») качество, как *критичность* (а далее — и *самокритичность*, и вообще, привычку к самостоятельному мышлению).

Отметим, что *внутренняя необходимость в мотивации*, в нужности тех или иных обоснований *присуща именно на рассматриваемом психолого-возрастном этапе*. Мотивация не так существенна в преподавании математики в младших и средних классах (более того, мотивирование, допустим, правила знаков при умножении скорее приведет к недопониманию, к чувству «*чего-то не того*», к «туману в мозгах»; в этом психологическом возрасте мотивацию вполне заменяют примеры, даже абстрактные). С другой стороны, роль внутренней мотивации в преподавании курсов математики в вузах, как правило, тоже невелика — можно допустить, что, раз школьник поступил в данный вуз, то он уже «достаточно замотивирован» (но на 1–2 курсах все-таки мотивация бывает существенна; ее формированию даже посвящают целые «спецкурсы», типа «Введения в специальность»). Иное дело — обучение математике в старших (X–XI) классах, а также в классах с углубленным изучением математики. Здесь *внутренняя мотивация* существенна, и *чтобы внутренне мотивированно, естественно и интересно преподать курс,* особенно все еще «новый» для средней школы курс, включающий азы математического анализа[1], *все средства хороши: от привлечения прикладных задач до использования историко-математического контекста.*

4. В идеале на каждом значимом этапе обучения обучаемый (обучающийся) должен получать некое интеллектуальное удовлетворение, да и попросту ему должно быть интересно. Сколь бы ясно и мотивированно мы не формулировали задачи учения, соответствующим образом не продвигали процесс обучения, все это не будет ни интересным, ни полезным, а останется тщетой и суетой, если изложение не будет *ясным* и *доступным*. Красивейший пример (факт, теорема) пропадет втуне, если не будет доступен ученику — и опять — суета сует ...

5. Кроме тщательного отбора примеров по критериям целесообразности, интересности и доступности, необходимо озаботиться об адекватном психологическому возрасту и наличествующим знаниям и умениям учащихся преподнесению материала. *Доступность, более осознанное, прочное и глубокое понимание достигается всемерным привлечением средств наглядности*, благо в большинстве разделов математического анализа их достаточно много. Заметим: подразумеваются НЕ какие-то там специальные «наглядные пособия» (хотя бы и компьютерные!), а мыслительные ассоциации математического объекта с графическим образом, который может быть и достаточно условно представимым (скажем, как поле направлений на плоскости). Наглядные ассоциации не только позволяют лучше прочувствовать то или иное понятие или свойство, но и помогают нащупать связи между разными понятиями, усмотреть то или иное свойство вместе с его доказательством.

[1] «*Всё еще новизна*» проистекает от слишком медленного и идущего как бы «вразнобой» («кто во что горазд») накопления *методической традиции.*

Уместно обратиться к Феликсу Клейну. В 1908 г. он писал, что в некой учебной книге того времени «*элементарная математика систематически и логически развивается на зрелом математическом языке, доступном студенту, далеко продвинувшемуся в своих занятиях. < ... > Между тем изложение в школе, выражаясь образно, должно быть* ***психологическим****, а не* ***систематическим***[1]*. Учитель должен быть, так сказать, дипломатом; он должен учитывать душевные движения юноши, должен уметь возбудить его интерес, а это будет ему удаваться лишь в том случае, если он будет излагать вещи в наглядной, доступной форме. Лишь в старших классах возможно также и более абстрактное изложение.*»

6. Наглядная, доступная форма изложения — это важный рычаг развития, поддержания, сохранения интереса к предмету. Еще один важный принцип — ***привлечение к изложению теоретического материала прикладных примеров*** — на всех этапах: перед рассмотрением нового материала (как «затравка»), при продвижении в новой теории (как «осязаемое подкрепление»), при подведении итогов (как уже «конкретный результат», вытекающий из проведенных математических рассмотрений), — играет и важную *воспитательную* роль, показывая *место математики в цивилизации*[2]. А любое «*Воспитание развивает способности*»[3].

7. С воспитательной, психологической точки зрения очень существенно, на наш взгляд, показать *место математики* (и *математиков*!) *в культуре вообще*, и *в духовной культуре*, в частности. И здесь в полной степени (ну, для начала, хотя бы в некоторой мере) можно и нужно использовать ***культурно-исторический дискурс*** предмета. Иными словами, при изучении тех или иных вопросов, при введении понятий, при формулировании и доказательствах теорем — во всех подходящих случаях *в математический контекст следует* (по возможности) *вносить соответствующий этому контексту культурно-исторический дискурс*, т.е. включать относящиеся *к конкретному математическому материалу* сведения конкретно-исторического характера — так сказать, историю предмета рассмотрения, причем ретроспективно («*что было — как стало*»). Сюда входит не только историко-биографические, но и лингвистические (иногда — просто этимологические), и терминологические справки...

Мы придаем использованию культурно-исторического дискурса в преподавании алгебры и анализа, особенно в выпускном классе, *существеннейшее* образовательно-воспитывающее значение и далее посвящаем этому целых две главы.

---

[1]Мы сказали бы, «*не* ***догматическим***», что наблюдается почти «сплошь и рядом». Что касается систематичности, то «систематичность систематичности рознь».

[2]В узком смысле — как материальной культуры.

[3]Правда, «*не создает их*!» — Вольтер. Но: «*Что примера лучше действует ...*?» — А. С. Пушкин!

Глава 2.3. ТРАДИЦИОННАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПАРАДИГМА

— Чему же вас учили? — спросила Алиса.

— Сначала чихать и плясать, конечно, — ответил Мок-Тартль, — затем четырем действиям арифметики: Служению, Почитанию, Угождению и Давлению.

Льюис Кэрролл

Самая главная идея выдвигаемой нами *концепции углубленного математического образования* состоит в *сочетании в учении* (*обучении*) ***обучающего*** (***образовательного***) *и* ***воспитывающего аспектов***. Именно эта идея является ведущей в курсе алгебры и анализа, и именно она легла в основу разработанного проекта учебника. Методика, совокупность «рычагов» ее реализации в процессе преподавания курса мы назвали ***стилем обучения***, а непосредственно в самом учебнике — ***стилем изложения*** (см. пред. главу). С точки зрения *философии образования* стиль обучения и изложения есть не что иное, как ***образовательная парадигма***, т. е. *принятая* — в данном случае, *нами*, в предлагаемом нами курсе и соответствующем учебнике, — *система принципов конструирования образовательного процесса*[1]. И коль скоро речь идет о предложении «собственной» парадигмы, проведем ее сопоставление с *традиционной парадигмой математического образования*, т. е. преимущественно применяемым на практике *подходом к постановке процесса математического образования* или, в нашей терминологии, *общепринятым* ***стилем*** *преподавания математики*.

Здесь в первую очередь следует рассматривать не идеи и концепции, высказываемые и выдвигаемые на сей счет математиками, методологами и методистами, а реально существующую *практику*, отраженную в *учебниках*. И здесь ведущим в преподавании математики — и в школе, и в вузах (университетах), — на протяжении, можно сказать, веков, является ***формально-дедуктивный подход***. Несколько огрубляя в деталях весьма разнообразную картину, этот подход можно описать примерно так.

Учащимся (школьникам, студентам) без особых оснований или объяснений (по-нашему, без специальной *мотивации*) предъявляется некоторый список исходных понятий и положений (определений, аксиом, правил оперирования с введенными математическими объектами). Вслед за тем — опять-таки, без мотивирования, — формулируются и доказываются свойства «объектов изучения», устанавливаются (в смысле *предъявляются*) и обосновываются (*доказываются*) связи между ними. Таким

[1] Термин *парадигма* (от греч. $\pi\alpha\rho\alpha\delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha$, **paradeigma** — «пример», «образец») у *Платона* означал *идею* как прообраз, первообраз *реально существующего*. В современной *философии науки* под парадигмой понимается *принятая* (*нормативная*) *методология* (*Г. Бергман*), *модель постановки проблем и их решений* (*Т. Кун*).

образом, изучаемая математическая теория (арифметика, алгебра, геометрия, etc.) представляется как некий свод определений, постулатов и правил, теорем и других сопутствующих предложений (т. е. *логически* выводимых утверждений). Как правило, в параллель к выстраиванию теоретической системы осуществляется и дидактическая ее как бы поддержка в виде «системы» (часто — просто *набора*) тех или иных упражнений, задач, направленных на тренировку в формально-логических действиях с изучаемыми объектами, в применении их свойств в стандартной или измененной ситуации. *Такова общая традиция изучения математики.*

Британский исследователь *Роджерс* в упоминавшейся ранее (в главе 1.1) работе[1] возводит описанный «*формалистский подход*» к *Христиану Вольфу* (1679–1754), немецкому математику и философу, последователю Декарта и Лейбница[2] [Роджерс, с. 75]. Излагая свои педагогические идеи, Вольф писал: «...*Мой способ обучения следует естественному образу мышления*» (1724). Однако представляется, что истоки дедуктивного подхода к изложению математики гораздо более глубокие и древние — они идут еще от *Аристотеля*, а непосредственно в математике — от фундаментального компилятивного труда «***Начала***» *Евклида* (VI в. до н. э.). Касательно утверждения Вольфа Роджерс замечает: «*Хотя в этой вере и содержатся серьезные изъяны*[3]*, всё же данная* ***официальная догма***[4] *является значимым „рабочим принципом“ для многих преподавателей математики*» (там же). Отметим, что это было (и есть!) так не только «для преподавателей математики» — евклидов подход столь впечатляющ, что даже *Спиноза*[5] свою «*Этику*» изложил «по Евклиду»!

Главный и очевидный недостаток формально-дедуктивного стиля преподавания математики состоит в том, что — при его *последовательном воплощении в практику обучения* — полностью игнорируется вопросы «***Почему?***» и «***Зачем?***»: *почему* выбраны те или иные определения? *зачем* доказывать те или иные свойства? *почему* математики выбрали для решения те или иные задачи? Иными словами, при таком подходе из процесса обучения оказывается изъятым существенный в воспитательном отношении *момент мотивации*. Ранее (в главе 2.2) мы уже отмечали, что этот («безмотивационный», «немотивированный») подход

---

[1] *Лео Роджерс*, «*Историческая реконструкция математического знания*» — «Математическое образование», 2001, № 1.

[2] И одному из учителей *М. В. Ломоносова*! Кстати сказать, именно Вольф ввел в математический обиход такие термины, как *уменьшаемое* и *вычитаемое*, *возведение в степень* и *квадратное уравнение*...

[3] О них — ниже.

[4] Выделено мною — автор.

[5] *Бенедикт* (*Барух*) *Спиноза* (1632–1677) — голландский философ-материалист, один из самых выдающихся мыслителей всех времен. Критиковал Декарта, общался с Лейбницем. «*Этика, доказанная в геометрическом порядке*» (1675) — основной труд Спинозы.

может быть вполне оправдан при изучении *арифметики* и *формальной алгебры* в младших и средних классах (с учетом *психолого-возрастных факторов*). То же во многом справедливо по отношению к изучению *классической геометрии*, в особенности *стереометрии*, даже в старших классах — в данном случае уже в силу большей *конкретности* предмета. Но этот же подход становится гораздо в меньшей степени оправданным при изучении *абстрактных и алгебраических аспектов геометрии — преобразований, координат, векторов...*; вопросы «*зачем?*» и «*почему?*» здесь являются уже вполне уместными. Наконец, формально-дедуктивный принцип обучения совсем мало приемлем при изучении *алгебры* и *начал математического анализа* в старших классах, и *особенно — при углубленном изучении математики*. Это так, опять же, по *психолого-возрастным* «соображениям» (но возраст и психология — *иные*!), а также из-за того, что указанные науки являются *наиболее абстрактными*. Основатель *позитивизма* французский философ *Огюст Конт* (1798–1857) в своей «*Иерархии позитивных наук*» (1830) относил *геометрию* к предпоследней, а «прочую» *математику* («науку о величинах») — к последней (по Конту, *седьмой*) «ступени абстракции». Несмотря на качественное развитие математики и изменение воззрений на ее предмет после Конта, по отношению к элементарной, «школьной» математике его классификация наук осталась вполне правомерной.

Другой негативной, особенно для *углубленного математического образования*, стороной традиционной образовательной парадигмы является то, что математика предстает перед обучающимися как бы «в готовом виде», как «*набор итоговых результатов и инструментальных техник*» [Роджерс, с. 74]. И далее: «*Этот дедуктивный стиль объявляется сущностью математики, и хотя считается допустимым упоминать об открытии и создании новых идей по ходу дела, эти идеи редко рассматриваются в историческом контексте, поскольку считается, что любые новые идеи должны быть представлены студентам*[1] *сразу же в „строгой“ манере*» (там же, с. 74–75). Мы полагаем, что, по крайней мере, при углубленном изучении математики, речь должна идти даже не об «историческом контексте» рассмотрения «идей», а о более широком и общем *культурно-историческом дискурсе* в контексте собственно математического образования. Анализу значения такого подхода посвящена следующая глава.

Напоследок отметим, что формально-дедуктивная образовательная догма хотя и является главенствующей и превалирующей в учебных курсах и учебниках математики, она издавна принимается не столь безоговорочно и однозначно. Среди главных ее критиков можно назвать и цитировавшегося выше *Феликса Клейна* (см. [73]; в этом разделе мы ссылаемся по «Списку литературы» из предыдущего раздела), и многих российских математиков (см. многочисленные публикации в рубриках «*Из*

[1] Напомню, что student на английском — в том числе и школьник.

истории образования» и других в журнале «*Математическое образование*», в сборниках «*Математическое просвещение*» всех трех серий, в журнале «*Математика в школе*»...). Наиболее значимые из относительно недавних *конструктивно-критических* предложений по модификации традиционной парадигмы — это ***эвристика*** *Пойа* (см. [118], [119], [120]), «*деятельностная дидактика*» *Фройденталя* (см. [144]), а также, по выражению *Роджерса*, «*атака*» на «формально-догматическую геометрию», которую в 1961 г. предпринял *Имре Лакатос* — британский математик венгерского происхождения, более известный как философ-эпистемолог[1] (1922–1974; см. [91], [Роджерс, с. 74–75]).

[1] *Эпистемология* (от греч. *επιστημη*, **episteme** — «знание») — *теория познания* как раздел философии.

Глава 2.4. ЗНАЧЕНИЕ КУЛЬТУРНО-ИСТОРИЧЕСКОГО ДИСКУРСА

Посылай свой хлеб по водам,
Ибо спустя много дней ты его найдешь...

Экклезиаст

Культурно-исторический дискурс *в (углубленном) математическом образовании* понимается нами как *практика постоянного и систематического вовлечения в процесс изучения собственно математики, т. е. математического содержания образования, сведений культурно-исторического ряда*:

— *привлечение конкретно-исторического материала, связанного с возникновением тех или иных* ***конкретных*** *математических содержаний*: *задач, понятий и определений, моделей, конструкций, подходов и идей, теорий и конкретных фактов (теорем, следствий, прочих утверждений), символики и терминологии (в частности, рассмотрение «математической этимологии*[1]*»)*;

— *использование относящихся к конкретному математическому содержанию сведений, касающихся конкретно-исторических общественных, культурных, политических обстоятельств, оказавших прямое или опосредствованное влияние на развитие математики*;

— *привлечение материалов историографического и биографического характера, показывающего роль личностных факторов и межличностных отношений, исторические особенности научных сообществ, имевших непосредственное отношение к развитию математики в его взаимосвязях с развитием других наук, искусств, культуры, техники, технологии...*

Нетрудно видеть, что указанные здесь составляющие культурно-исторического дискурса представлены в соответствии с принятыми *концепциями истории математики* (см. главу 1.1). Несмотря на пространное описание составляющих рассматриваемого дискурса, *подразумевается*, что весь относящийся к нему материал играет *подчиненную, вспомогательную* роль по отношению к основному математическому материалу.

Сам по себе термин «*дúскурс*»[2] ввел в философский и культурологический оборот *Мишель Фуко*, французский философ и историк культуры (1926–1984), для обозначения «*совокупностей высказываний*», относящихся к тем или иным «деятельностным практикам» и составляющих

---

[1] *Этимология* (от греч. *ετυμον*, **etymon** — «истина», «правда», а также «истинное значение слова») — *происхождение слова*, а также *наука* о происхождении слов, раздел языкознания — *лингвистики*, т. е. науки о языке (а это — от лат. **lingua** — «язык»).

[2] От лат. **discursus** — «беседа», «разговор». Примечательны другие значения этого слова: «бегание туда и сюда», «барахтанье», «круговорот», «беспрерывное мелькание»!

философию. Иными словами, под дискурсом понимается «*процесс получения нового знания на основе философски и научно состоятельных суждений, представленных в языковой форме*»[1].

Рассматриваемый нами культурно-исторический дискурс в математическом образовании предполагает использование суждений в адекватной целям собственно (углубленного) математического образования *интерпретации*. Для суждений относительно фактов истории математики это вполне естественно и общепринято, причем практикуются весьма разнообразные подходы к интерпретации (см. главу 1.1); наши подходы диктуются воспитательным и образовательным аспектами процесса обучения математике.

Теперь о *значении* такого *стиля* преподавания математики, непосредственно о тех целях, которые могут быть достигнуты, которых мы *желаем достичь* посредством *сочетания* основного математического контекста процесса обучения и культурно-исторического дискурса.

Прежде всего, это демонстрация целесообразности (*целе-сообразности*!) построения (создания, развития) математических теорий — постановка вопросов «*зачем*?» и «*почему*?» в каждом (по возможности) принципиально важном случае, объяснение того, *откуда* берутся математические задачи, модели, теории.

Далее, такой дискурс позволяет показать сам предмет математики не в застывшем, «готовом» виде, а как *развивающуюся науку*, как систему взаимосвязанных теорий и различных подходов к решению тех или иных конкретных задач в их *зарождении*. Рассматривается не просто математика, а *диалектика математики*.

Третье: математика представляется не в изолированном виде, а как органичная и неотъемлемая часть всей системы научного познания мира, как важная составляющая культуры и цивилизации. Говоря словами бельгийского математика и педагога *Вилли Сервэ*, математика показывается как «*культура в лоне культуры и техника в сердце техники*»[2].

Четвертое: показывается роль *математиков*, «Men of Mathematics», *личностей* в развитии математики, в решении задач практики; роль математики *и математиков*, математических сообществ в общественной жизни, в становлении человеческой цивилизации, в развитии общечеловеческой культуры.

Что это дает непосредственно для образования? — Развитие интереса к предмету. Формирование правильного представления о предмете и о его роли. Общекультурное образование, к которому, вне сомнения, относится знание истории предмета. И как итог, важнейший в воспи-

---

[1] *Канке В. А. Философия. Исторический и систематический курс.* — М.: Логос, 2001, с. 163

[2] «*Мы ... находимся сейчас ... в высокой математической конъюнктуре, никогда прежде не достигавшейся. Больше, чем когда-либо, математика является одновременно культурой в лоне культуры и техникой в сердце техники*» [37, с. 23–24].

тательном отношении, — формирование *личного, личностного, психологического отношения* к предмету. Именно такое отношение поможет сориентироваться в выборе своего дальнейшего пути, сделает этот выбор *свободным* (или, по крайней мере, *более свободным*). Такой характер школьного образования позволит развиваться и дальше, причем *совсем не обязательно* именно как будущему математику, а именно что как достаточно *разносторонне образованному* человеку...

Конечно, все это действительно достижимо... но только при условии *адекватной поставленным целям* организации процесса обучения. Предпринятая в разработанном нами курсе алгебры и анализа *попытка*[1] *конкретной реализации* идеи использования культурно исторического дискурса в целях углубленного математического образования и рассматривается в следующей, последней главе.

[1]Именно *попытка* — хотя во многом и проверенная в практическом преподавании. Но проверка на личном опыте — это одно, а истинная практика, «проверка на дорогах» — совсем другое. Поэтому и написана данная книжка.

Глава 2.5. КУЛЬТУРНО-ИСТОРИЧЕСКИЙ ДИСКУРС В ОБУЧЕНИИ И В УЧЕБНИКЕ

Не опасаясь упрека в педантизме, мы скорее склонны утверждать, что лишь основательность может быть занимательной.

Томас Манн

Если отвлечься от анализируемого нами курса и учебника, то следует заметить, что *наилучшим способом* реализации идеи культурно-исторического сопровождения курса математики было бы использование соответствующего материала *непосредственно учителем* в соответствии с конкретными потребностями — своими и обучаемого класса, в том числе психологическими. Однако это предполагает, во-первых, наличие адекватных указанной идее методических *внутренних* установок у учителя (можно сказать, переориентировка в образовательно-методической доктрине — см. главу 2.3), во-вторых, что *самое главное*, *владение учителем соответствующим материалом по истории математики* (мы не говорим еще и о достаточном уровне педагогического мастерства, и об опыте проведения такого подхода — не на уровне «анекдотов», а в качестве серьезной и уместной компоненты уроков–лекций–диалогов: то и другое, как известно, дело наживное — был бы настрой!). И здесь приходится признать дефицит нужных культурно-исторических знаний у значительной части учителей, а причина этого — не какие-то недостатки педагогического образования, а попросту «неподъемность» указанного пласта образования, в силу его обширности и в условиях отсутствия учебных или иных книг, хотя бы в какой-то мере охватывающих все культурно-исторические и философо-методологические аспекты развития математического знания (см. главу 1.2 и следующий за ней список литературы!). В этой связи отметим, что, тем не менее, при любой собственной концепции преподавания математики, *самое полезное* для учителя, для его и методического, и методологического (и общекультурного, и профессионального!) самообразования — это изучение как раз *истории математики*! Это, однако, всего лишь рекомендация (или, если угодно, *благое пожелание*), а как можно *реально* способствовать воплощению рассматриваемых педагогических установок в практике обучения?

Первое, что напрашивается: включение в учебно-методический комплекс соответствующей книги, предназначенной учителю. Однако такое решение попросту нерационально: культурно-исторический «антураж» уместен и может принести действительную пользу лишь в том случае, если он *непосредственно привязан* к математическому образовательному контексту, т. е., попросту говоря, к *конкретному математическому содержанию*. Бессмысленно и лишено нужного педагогического воздействия описание и даже упоминание тех или иных исторических обстоятельств и сведений вне непосредственной связи с изучаемым в данный

конкретный момент материалом, так что по содержанию подобная книга *одновременно* должна быть и *учебником математики*. Учитывая, что *любой учебник* равнó направлен (но по-разному!) и на обучающегося, и на обучаемого, адресован как ученику, так и учителю, понятно, что нет необходимости в создании специальной книги для учителя, а нужно как-то *интегрировать* содержание культурно-исторического дискурса непосредственно в учебник. Но каким образом? И в чем тогда будет состоять миссия учителя? — На второй вопрос ответить проще: основная задача учителя — *эффективное обучение предмету*, а культурно-исторический дискурс — *вспомогательное средство* в процессе обучения, направленное на решение, главным образом, *воспитательных задач*. И учитель должен *сориентировать* своих учеников в предмете, в том числе, и в его культурно-историческом содержании, *стимулировать* самостоятельное использование учащимися культурно-исторического дискурса, *привлечь первоначальный интерес* учащихся к этому — *общекультурному* — аспекту математики. А как — по-разному, в зависимости от конкретных обстоятельств, от своей практики, опыта, стиля преподавания (вспомните слова *Клейна*: *Учитель должен быть, так сказать,* ***дипломатом****; он должен учитывать душевные движения юноши*[1]*, должен уметь возбудить его интерес...*; см. главу 2.2).

Теперь о том, как в одной книге *сочетать* математическое содержание и культурно-исторический дискурс. В каком-то (очень бедном) смысле такое сочетание осуществляется и в действующих учебниках, скажем, алгебры и начал анализа: в конце каждой главы приведен совсем коротенький раздел «*Сведения из истории*». Даже если *расширить* эти разделы, подобная компоновка материала кажется нам неудовлетворительной: исторические сведения не привязаны к конкретным математически содержательным сведениям, и в итоге исторические рубрики остаются вне поля внимания учащихся. В некоторых книгах общекультурный и исторический материал имеет конкретную привязку, но дается в виде примечаний — хорошо, если подстрочных, а то и вынесенных (как то обычно делается в математических монографиях и в некоторых учебниках по высшей математике) в конец главы или даже всей книги. Вынесенные примечания, как известно многим читателям даже поэзии или беллетристики, довольно неудобны (правда, в художественной литературе подстрочные комментарии — это вообще нонсенс; они уместны разве что для переводов иноязычных вставок и фрагментов). Подстрочные примечания лучше, но влекут значительные ограничения на объем — не может же книга, тем более, учебник, скажем, на 20 % состоять из примечаний.

Есть (по-моему, единственная) удачная в отношении композиции математического и исторического содержания книга, которая может считать-

[1] И *девушки*, конечно, тоже! «Дискриминирующие» слова Клейна объясняются тем, что в Германии начала XX в. гимназическое образование получали по преимуществу юноши.

ся *учебной*[1] — это популярнейшая из почти популярных книга *Р. Куранта* и *Г. Роббинса* «***Что такое математика?:*** *Элементарный очерк идей и методов*» (см. [89]). Основной автор, один из крупнейших математиков XX в. *Рихард Курант* (1888–1972) — ученик *Гильберта*, эмигрировавший в 1934 г. из фашистской Германии в Соединенные Штаты Америки, — задумал книгу как раз такую, «*читая которую, можно было бы „войти в соприкосновение с самим* ***содержанием*** *живой математической науки“*»[2]. Этот свой труд Курант понимал как «*попытку*» «*избежать всего слишком технического или искусственного, делая изложение математики в одинаковой степени свободным от духа школьной рутины и от мертвящего догматизма, отказывающегося от мотивировок и указания целей, — того самого догматизма, который представляет собой столь неприятное препятствие для честного усилия*»[3]. Ведущий автор придавал книге большое значение именно как попытке (слово Куранта!) преодоления формально-дидактической парадигмы в изложении математики — задаче, тогда (да и посейчас) в США весьма злободневной (о драматической истории написания и издания книги Куранта и Роббинса см. в «*Добавлении* 2» к 3-му ее изданию на русском языке[4]; интересно, что на названии «Что такое математика?» Рихард Курант остановился по совету знаменитого немецкого писателя, тогда уже Нобелевского лауреата *Томаса Манна* (1875–1955), который в то время тоже проживал в США).

Изложение в книге Куранта и Роббинса таково, что математика и сопутствующая ей история *составляют единый текст*. Язык и стиль изложения весьма удачны, так что книга легко читается и производит впечатление *единого целого* — задача показа «*живой математической науки*» в действительно «*Элементарном очерке*» далеко не всегда элементарных идей и методов (кроме математического анализа, можно назвать проективную, неевклидову и многомерную геометрии, элементы топологии, вариационного исчисления...) была решена, причем очень успешно.

Однако использованный подход к сочетанию образовательного математического и исторического текстов вряд ли можно считать приемлемым в *учебной книге*. Представляется, что в учебнике чисто учебный текст должен быть явно *отделен* от вспомогательного. При том, что

---

[1] Можно указать еще на блестящий двухтомник *Феликса Клейна*: *Элементарная математика с точки зрения высшей* (кстати, не так давно переизданный: см. [73], 1987), — но сей трактат по преимуществу методико-методологический, а не учебный.

[2] Это цитата из «*Предисловия к третьему изданию на русском языке*» математика В. М. Тихомирова, который, в свою очередь, цитирует предисловие самого Куранта, 1941.

[3] А это уже непосредственно из «*Предисловия к первому изданию*» Р. Куранта — см. [89], 3-е изд., с. 17.

[4] [89], 3-е изд., с. 544–550. В 2001 г. сразу два издательства переиздали эту книгу: Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» — 3-е изд., стереотипное (повторяющее 2-е изд., 1966) и Москва, МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования) — 3-е изд., исправленное и дополненное; мы ссылаемся на последнее издание.

вспогательный текст, по замыслу, должен состоять из *фрагментов*, четко привязанных к конкретным частям учебного текста (к определениям, теоремам, следствиям, примерам, задачам...), возможны два варианта организации вспомогательного текста: в виде подстрочных примечаний — в том случае, если комментирующий фрагмент невелик по размерам (например, этимологическая или краткая биографическая справка, отсылка к иному источнику и т. п.), — или в виде полиграфически выделенных фрагментов «инородного» текста. Способ выделения — шрифтом, цветом, элементом оформления (типа «рамки» или иным) — это уже вопрос технологии полиграфического производства, и он не является принципиальным: важно только, чтобы во всей учебной книги можно было легко сориентироваться. Если бы речь шла об *электронной книге*[1], т. е. о соответствующем *гипертексте*, то организацию, взаимосвязь основного и вспомогательного материала можно осуществить через систему взаимных *гиперссылок*, причем они же обслуживали бы и систему «подстрочных примечаний». Но в таком случае возникает вопрос о достаточной эффективности гипертекстуальной реализации — о том, насколько значим будет психологический стимул *использования* гиперссылок; мы не будем обсуждать ни этот вопрос, ни вообще электронный вариант разработанного учебника. Вместо этого в заключение опишем, в каком виде разработанный учебник, сочетающий математический текст с культурно-историческим дискурсом, предложен для полиграфической реализации — как обычной, традиционной, *бумажной* книги.

В проекте учебника «Алгебра и анализ» для 10 класса конкретное образовательное содержание, которое уместно и имеет смысл комментировать, сравнительно невелико, поэтому на протяжении почти всей этой книги культурно-исторический комментарий организован в виде кратких подстрочных замечаний. В последней части книги, «*Алгебра и анализ тригонометрических функций*», приведены более пространные вспомогательные сведения — они выделены *внутри* основного текста, сопровождая, например, определения.

В книге для 11 класса фактический материал, который целесообразно было бы прокомментировать, уже гораздо значительнее как по объему, так и по важности. Поэтому в этой книге практически весь культурно-исторический комментарий дается в виде выделенных фрагментов — как *текст внутри текста*.

Опыт этого проекта существенно учитывался при разработке учебного пособия по рассматриваемому элективному курсу «Введение в алгебру и математический анализ: культурно-исторический дискурс». При этом мы имели гораздо большую свободу и априорную «сверхидею»: «уравновесить» математическое и культурно-историческое содержания, уравнять их «в правах», в смысле *значимости* — так, чтобы уже только учитель или ученик сами выбирали, что для них значимее... Описание структуры того, что из этого получилось, см. в п. 3.5[2].

---

[1] В принципе, такой вариант реализации разработанного учебника тоже возможен.

[2] В следующих, утилитарных разделах (3–5) подразделы будем и именовать «подразделами» или «пунктами» — вместо «глав» в концептуальных разделах 1–2.

Раздел 3. КУРС «ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: культурно-исторический дискурс»

3.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА. ЗНАНИЯ, УМЕНИЯ, КОМПЕТЕНЦИИ

Цели и задачи курса. Изучение элективного курса «Введение в алгебру и математический анализ: культурно-исторический дискурс» направлено на достижение следующих целей.

1. Получение представления о математике как о живой, развивающейся науке, движимой внутренними и внешними стимулами развития.

2. Получение представления о роли математиков и их сообществ в развитии математики, в обучении математике, в развитии общечеловеческой культуры и цивилизации.

3. Ознакомление с основными линиями развития математического знания: числа, уравнения, функции, множества, — в конкретно-историческом контексте.

4. Способствование эмоционально-психологическому восприятию математики и отношению к математике; развитие интереса к математике.

При изучении курса перед учащимися ставятся следующие **конкретные задачи**:

— освоение знаний об истории развития алгебры и предыстории математического анализа, представлений о числах, уравнениях, функциях и множествах;

— овладение изучаемыми в курсе сведениями о различных методах математики и математического моделирования на примерах выражений и функций, алгебраических уравнений и функциональных задач;

— получение конкретных представлений о взаимосвязях математики, других наук и практики, являющихся движущими силами самой математики и позволяющими математике воздействовать на другие науки и практику;

— восприятие математики как важной части системы наук, культуры и общественной практики, понимание сути математизации наук и практики.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ (планируемые результаты обучения)

Предметные знания

Алгебраические уравнения 2, 3, 4 степеней. Упрощение с помощью линейной замены.

*[1] Теорема Больцано–Коши о промежуточном значении. Существование корня у многочлена нечетной степени.

Формула Кардано–Тарталья–дель Ферро. Неприводимый случай.

Схема Феррари разложения уравнения степени 4. Ошибка Лейбница: разложение многочлена $x^4 + a^4$.

Алгебра Виета. Тригонометрическое решение кубических уравнений в неприводимом случае.

Деление и делимость многочленов. Алгоритм Руффини–Горнера. Теорема Безу и ее следствия.

Теорема о числе корней многочлена. Кратные корни. Учет кратности корней.

Разложение многочленов. * Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители.

Теорема о рациональных корнях целочисленных многочленов. Разложение методом неопределенных коэффициентов.

* Полностью разложимые многочлены. Общая теорема Виета.

* Комбинаторные задачи. Перестановки, сочетания, размещения.

* Формула бинома Ньютона. Треугольник Паскаля.

* Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Задание многочленов значениями. Интерполяционная формула Лагранжа.

Открытия Декарта и Ферма. Кружок Мерсенна. Алгебра Декарта. * Теория чисел Ферма.

Метод Ферма отыскания наибольших и наименьших значений. * Принцип Ферма в оптике. Интерпретация Гюйгенса.

Координаты у Аполлония, Ферма и Декарта. Конические сечения и кривые второго порядка.

Алгебраический метод геометрических построений. * Алгебраизация задач на построение. Теорема о построимости циркулем и линейкой.

Предметные умения, которыми должны овладеть учащиеся по изучении данного курса:

— умение объяснять исторические обстоятельства возникновения тех или иных математических теорий, их связь с развитием наук и практики;

— умение понимать и правильно интерпретировать математические задачи, включенные в программу курса;

— умение правильно применять рассмотренные в курсе методы исследования и решения задач, связанных с числами, функциями, алгебраическими уравнениями;

— умение верно интерпретировать изученные математические модели: уравнения, функции и графики, функциональные задачи, — и результаты их анализа/решения, исследования.

[1] Звездочкой здесь и далее помечены вопросы факультативного характера. Подробнее см. в методических комментариях (разделы 4–5).

Общеинтеллектуальные умения:

— умение конкретно-исторически и логически подходить к анализу тех или иных обстоятельств и различных ситуаций, выделять главное и достоверное;

— умение объяснять сущность взаимосвязей между математикой, наукой вообще, культурой, цивилизацией и практикой на конкретных этапах исторического развития общества;

— умение разъяснять основные этапы развития различных математических теорий в их связи с внутриматематическими и внешними обстоятельствами.

Общекультурные и мировоззренческие компетентности:

— понимание соотношения математики как науки с реальной действительностью;

— понимание сущности процесса математизации знаний и непосредственной практики;

— понимание роли математики и, в частности, алгебры и математического анализа в изучении закономерностей окружающего мира;

— понимание роли личностей в развитии математики, диалектики взаимовлияния личности и конкретно-исторических обстоятельств.

3.2. ПРОГРАММА КУРСА

Тема 1. Введение в историю алгебраических уравнений (40 ч)

Квадратные уравнения. Сведение к двучленным и вывод формул для корней.

История квадратных уравнений. Аль-Хорезми.

Кубические уравнения. Упрощение. Формула Кардано.

Кардано, Тарталья, дель Ферро, Феррари.

Линейные замены и уравнения степени 4. Упрощение. Разложение Феррари.

Метод Декарта (неопределенных коэффициентов) разложения уравнений степени 4.

Неприводимый случай в формуле Кардано. Комплексные числа у Кардано и Бомбелли.

Делимость и разложение многочленов. Ошибка Лейбница.

Деление многочлена на двучлен. Теорема Безу.

Алгоритмы деления на двучлен: группировка, метод Руффини–Горнера, деление «уголком».

Теорема о делимости. Рациональные корни целочисленных многочленов. Понижение степени уравнений.

Кратные корни. Число корней. Полностью разложимые многочлены.

* Функциональное и алгебраическое равенство многочленов.

* Однозначное задание многочленов. Лагранж и его интерполяционная формула.

Алгебра Виета. Неприводимый случай у Виета. * Общая теорема Виета.

Тема 2. Предыстория математического анализа (20 ч)

Галилей и Декарт. «Новая математика» Декарта. Алгебраический метод в геометрических задачах.

История координат. Аполлоний и конические сечения. Координаты у Ферма и Декарта.

* Разрешимые и неразрешимые задачи на построение. Непостроимость числа $\sqrt[3]{2}$.

Жизнь и вера Декарта в метод.

Ферма. Задачи на максимум до Ферма и у Ферма.

* Экстремальный принцип Ферма в оптике.

* Ферма и теория чисел. Великая теорема. Уайлс.

Мерсенн. Парижская академия.

Резерв — 10 ч.

3.3. ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Основная наименьшая дидактическая единица курса — пункт параграфа, рассчитанный, как правило, на изучение в течение одного урока. Конкретное планирование по пунктам дается в разделах 4–5 в начале комментариев к каждому параграфу. Здесь же приведем планирование по темам–параграфам. Число часов (правый столбец) на изучение параграфов указано ориентировочно — так, чтобы учитель имел бóльшую свободу (но чтобы можно было уложиться в суммарное время по темам 1–2: 40 и 20 ч соответственно).

Тема 1: ВВЕДЕНИЕ В ИСТОРИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (40 ч)

§ 1.1. Уравнения квадратные и кубические	**7–9**
§ 1.2. Великое искусство и жизнь Джероламо Кардано	**4–6**
§ 1.3. Уравнения четвертой степени	**7–8**
§ 1.4. Уравнения и многочлены	**6–7**
§ 1.5. Следствия из теоремы Безу	**9–14**
§ 1.6. Аналитическое искусство и жизнь Франсуа Виета	**5–7**
§ 1.7*. Теорема Виета и комбинаторика	**[10]**

Тема 2: ПРЕДЫСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (20 ч)

§ 2.1. Галилей и Декарт. Новая математика	**5–9**
§ 2.2. Координаты. Жизнь и вера Декарта	**5–9**
§ 2.3. Задачи на максимум/минимум. Ферма и теория чисел	**5–9**

3.4. ОБЩИЕ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

3.4.1. Методы преподавания и формы организации учебных занятий

В приведенной программе курса указано приблизительное число уроков, отводимых на каждую тему. На наш взгляд, наиболее приемлемым в старших классах, как для школьников, так и для учителя, является организация занятий по *парам* уроков — одно занятие в неделю.

Пару уроков лучше сорганизовать как спаренный урок, в начале которого подводится итог предыдущего урока и примерно в течение урока предлагается новый материал (или кратко повторяется материал, уже пройденный в базисном/профильном курсе). Здесь нецелесообразно отделять содержательный математический материал от культурно-исторического контекста его введения в математику. Конечно, нет смысла дословно или в пересказе повторять исторический комментарий из учебного пособия — учащиеся могут прочитать его самостоятельно. Но чтобы подвигнуть их к этому, нужно обозначить в уроке какие-то узловые, ключевые моменты истории, относящиеся именно к рассматриваемым конкретным фактам из математики. Говоря схематично, опираясь на изложение в учебном пособии, изложение в классе целесообразно строить как методологический и содержательный комментарий к нему — возможно, с привлечением дополнительного материала из разных источников (других книг, методических и учебных пособий, монографий по истории математики, биографических справочников и энциклопедий, журналов, сведений, размещенных в Интернете и пр.; список литературы приведен в разделе 1 методического пособия).

Второй урок пары отводится на самостоятельный разбор материала из учебного пособия или решение упражнений на пройденный материал, подобранных так, чтобы учащиеся как бы продолжили рассмотренные математические изыскания, а иногда и погрузились в поиски тех давних лет. В ряде случаев почти вся пара может быть занята на лекцию/беседу с активным вовлечением учащихся. Так будет, например, при объяснении алгебраической теории геометрических построений — тогда, когда математическое содержание удаляется от школьного «обязательного минимума».

Одна из основных задач учителя — самому прочувствовать курс «математики с историческими комментариями» или «истории математики с математическими иллюстрациями». Только тогда можно рассчитывать на интерес школьников и их активное «соучастие» в занятиях по курсу. Если такой интерес есть, то можно организовывать уроки–конференции, с докладами одного–двоих учащихся и с их «пресс-конференцией» для остальных (на такую «конференцию» можно [и стоит] пригласить учащихся из других групп/классов). Время для подобных мероприятий запланировано как резерв (5 недель) или рекомендовано в комментариях к параграфам. Задания для самостоятельных исследований учащихся иногда приводятся по ходу основного изложения.

3.4.2. Оценка достижений учащихся

Главные достижения учащихся состоят в сформированности их интереса к математике как виду человеческой, причем творческой деятельности; в понимании много раз упомянутых связей: творцы математики — МАТЕМАТИКА — наука — культура — цивилизация — общественная практика. Понятно, уровень такого рода достижений оценить очень трудно, если вообще возможно. Но ни в коем случае такие достижения не следует подменять достигнутыми в отношении успешности в решении упражнений к данному курсу!

3.5. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ПО КУРСУ

Вместе с характеристикой учебного пособия мы приведем и «автохарактеристику» данного методического пособия, с которой и начнем. Как, наверное, уже понятно, методическое пособие состоит из двух частей: из *практико-ориентированной концептуальной части* (это «Предисловие» и материалы разделов 1–2) и *утилитарной практической части* (разделы 4–5). Настоящий раздел 3 имеет промежуточный характер.

Пособие не случайно названо «*Методическим и методологическим комментарием*» — оно действительно построено как *комментарий*, причем многоступенчатый, многоуровневый. На нижнем, «утилитарном» уровне это *комментарии к учебному тексту*, т. е. к учебному пособию. Они даются в разделах 4–5 (по темам-главам 1–2 учебного пособия) и в настоящем подразделе 3.5. Следующий уровень — это «*комментарии к комментариям*», включая аппарат методической ориентировки из настоящего раздела 3 и ориентирующих таблиц, предваряющих комментарии к каждому параграфу. Наконец, *высший уровень* — комментарии третьего порядка, собранные в разделах 1–2 и объясняющие *все* прочее, от программ, комментариев к учебному пособию до самого учебного пособия.

Основной структурной дидактической единицей учебного пособия является *пункт параграфа*. Это не равномерная дидактическая единица (не типа «параграф–урок»), что обусловлено характером учебного пособия и его двоякой направленностью.

Вторая тема (глава 2) объективно труднее первой: чем ближе мы подходим к *математическому анализу*, тем «изощреннее» становится математика. Задача решения уравнения, естественно, проще, чем задача на отыскание наибольшего/наименьшего значения выражения. И обращаться с единственной числовой переменной проще, чем иметь дело с *парой* переменных и с геометрическими образами на координатной плоскости, и т. д.

В связи с этим несколько меняется и *стиль изложения* в учебном пособии, приспосабливаясь к характеру материала. Так, некоторые пункты

даются в *проблемной трактовке* — в виде логически связного текста, в котором комментарии перемежаются с постановкой заданий. Четкое разведение математического содержания и гуманитарного, культурно-исторического контекста, характерное для изложения большей части первой главы, сменяется взаимным «растворением», диффузией математического и гуманитарного содержаний.

Мы отчасти компенсируем различия между главами (темами) в данном пособии для учителя — характером и степенью подробности методического комментария к отдельным пунктам параграфов.

Учебное пособие было задумано как *самоучитель*. В какой степени это удалось в отношении *математического* содержания — не нам судить. Но что касается *культурно-исторического дискурса* или, иначе говоря, *гуманитарного* содержания с опорой на математический контекст — то здесь доступность для самостоятельного изучения, нам кажется, удалось обеспечить.

Учебное пособие структурно и методически выстраивалось так, чтобы в большинстве случаев методика преподавания, преподнесения материала была ясна без дополнительных объяснений. В связи с этим пособие для учителя в своей утилитарной, практической части построено как минимальный методический и иногда методологический *комментарий*. Этот комментарий структурирован по пунктам параграфов. Указано время, *рекомендуемое* для изучения каждого пункта; *рекомендуемые* формы проведения занятий; те или иные нюансы, когда они действительно есть (и желательно их учесть); связи внутри элективного курса, когда они не очевидны.

Определяя методику проведения занятий, учитель должен учитывать «самообразовательную» направленность учебного пособия или, по крайней мере, его самообразовательную компоненту. Пересказ содержания учебного пособия неинтересен и, на наш взгляд, антипедагогичен. Мы полагаем, что имеет смысл избрать форму *комментирования* учебного материала — главного или того, который как-то отражен в специально оставленных открытыми вопросах. Чаще всего это сделано *неявно*, как в нескольких случаях применения *метода математической индукции*; в подобных случаях иногда это оговаривается в методическом комментарии. Иной раз открытые вопросы, задачи или задания сформулированы *явно*, прямо провоцируя школьника или другого читателя на активность — на *поисковую активность*.

Внутрикурсовые связи довольно сильны. Укажем только на цепочку вопросов, приводящую к *теореме Виета* в первой главе, и то, как используется эта теорема для уравнений степеней 2 и 3 во второй главе (свойства параллельных хорд коник; неразрешимость задач в квадратных радикалах).

Гуманитарной компонентой можно распоряжаться по-разному. Поначалу, в комментариях к первым параграфам главы 1, мы указываем

некоторые возможные формы работы с гуманитарным содержанием — от учительского изложения (точнее, узловых комментариев к культурно-историческому дискурсу из учебного пособия) до ученических мини- или настоящих конференций с сообщениями и докладами, с обсуждением и свободной дискуссией.

Формы подачи гуманитарного содержания в учебном пособии весьма разнообразны: от простых сопутствующих комментариев исторического, биографического или лингво-семиотического[1] свойства до развернутых жизненно-творческих биографий участников математической эпопеи. А иногда, как уже упоминалось, математическое и гуманитарное содержание «диффундируют», взаимопроникают друг в друга — наподобие некоторых таких текстов из упоминавшейся книги Р. Куранта и Г. Роббинса «*Что такое математика?*». Эти содержания и не надо отделять, ориентируясь на математическое содержание и комментируя гуманитарное только в случае необходимости (в классах гуманитарных профилей — напротив, учитель ориентируется на гуманитарную компоненту содержания, лишь при необходимости привлекая математический комментарий). Подобного рода фрагменты и целые пункты параграфов часто встречаются в главе 2.

Обратим внимание и на «видеоряд» — «галерею» портретов многих действующих лиц, от *Фалеса* до *Эйнштейна*. Мы постарались показать те или иные портреты всех упоминающихся в тексте учебного пособия ученых, но портреты многих из них не сохранились, если когда-либо существовали. Посоветуйте школьникам посмотреть на *глаза* математиков, тех же *Больцано* и *Коши*. Полагаю, не нужно пренебрегать этой эмоционально-«эстетической» возможностью. Многие биографические сведения, наверное, также могут иметь эмоционально-психологическое воздействие на школьников и способны вдохновить их «на великие дела»[2]!

Остановимся на выборе тематики глав 1–2 данного элективного курса. *Первый критерий*, и в этом курсе практически решающий — *близость к основному курсу математики*, как в понятийном, так и в методическом плане. *Второй критерий*, также крайне существенный: *методологическая важность* понятий и теорий, раскрываемых в рамках культурно-исторического дискурса. *Третий критерий*, который мы не могли не учитывать — *утилитарная ценность*, или полезность математического содержания, вовлекаемого в культурно-исторический дискурс, в гуманитарный фон.

(Как видите, мы отталкиваемся от предположения, что данный элективный курс будет использоваться в классах математического или естественно-научного профиля. Если электив используется в «гуманитарном сообществе» школьников — например, в классах гуманитарного профиля, — то «гуманитарный фон» становится основным содержанием, а ма-

[1] Греч. *σημειωτικη*, semeiotike, от *σημειον*, semeion — знак: наука о знаках, знаковых системах; здесь подразумевается символический язык математики.

[2] Опять: «*Что примера лучше действует?..*» — А. С. Пушкин, «*Бова-королевич*»!

тематическое содержание становится «фоном». Наверное, для такого варианта использования данного электива должна быть разработана особая стратегия и тактика, специальная методика.)

Под утилитарной направленностью мы понимаем несколько векторов: способствование лучшему, более прочному и сознательному усвоению основного и профильного курсов математики; упрочение знаний, умений и навыков, необходимых для успешности учения в профильных классах и для достижения лучших результатов, буде они проверяемы через обычные контрольные работы, зачеты и коллоквиумы[1], экзамены или даже ЕГЭ; качественное улучшение не только уровня *математической культуры* (это очень существенное качество, но в малой степени утилитарное), но и качества подготовки к продолжению образования. Последнее включает: осознанность выбора дальнейшей профессии или просто области будущей деятельности; качественная подготовка к конкурсным экзаменам в университеты и вузы естественно-математического или физико-технического[2] профиля (для гуманитарных классов имеется возможность лучшей подготовки в такой важной гуманитарной области, как *история науки*); в какой-то степени подготовка к учебе на младших курсах вузов (это касается не только и не столько содержания[3], сколько *формы*: работа с текстом, конспектирование, подготовка докладов и сообщений...).

Возвращаясь ко всем трем критериям отбора — не содержания, а именно *тематики* (одну и ту же тематику можно реализовать во многих разных содержаниях), — специально отметим принципиальное разведение этих критериев с ориентированностью на популярность или занимательность. В этом отличие данного учебного пособия как от множества научно-популярных книг, посвященных, как правило, какой-то узкой проблеме или конкретным ученым, так и от скорее занимательных энциклопедий по математике для детей и школьников. Нет ничего проще, чем, скажем, взять того же *Пифагора* и «нанизать» на его легендарную историю множество математических и околоматематических «фенечек». Наша задача *педагогическая* — не повторяясь, сошлемся на «Предисловие» к методическому пособию.

С другой стороны, учебное пособие по своему замыслу должно быть *интересным и последовательным, цельным и связным повествованием*, «хребтом», стержневой линией которого является *последовательность связанных, зацепленных одно с другим математических содержаний*, проецирующихся на школьный курс *математики*. Мы говорим о *всей* школьной математике, без разделения на алгебру, геометрию, анализ: в реальности во многих пунктах, позициях, темах эти предметы соедине-

[1] Напомним: лат. colloquium — собеседование; обычно коллоквиумы — это собеседования по теоретическим вопросам.

[2] Мы имеем в виду отнюдь не только МФТИ, но и МИФИ, МВТУ, МИСиС и т. д.

[3] Хотя усвоение темы «*Конические сечения в школе*», без сомнения, поможет первокурснику лучше «переварить» классическую *аналитическую геометрию*.

ны, подобно сиамским близнецам, и незачем их разделять. Ярчайший пример такого соединения — «*Геометрия*» *Рене Декарта* (1637 г.), в которой на самом деле произведен самый решительный «поворот руля» от древнегреческой геометрико-алгебраической традиции к *современной алгебре*, да такой, что на горизонте стал маячить еще не родившийся в то время *математический анализ*.

Таким образом, занимательность и популярность мы, *по замыслу*, заменяем на *интересность* и *доступность*, не отступающую от основных принципов: опора на школьный курс, методологическая важность (вкупе с методической целесообразностью), утилитарная направленность.

Основываясь на этих принципах, для данного элективного курса мы отобрали, во-первых, *линию изучения алгебраических уравнений* — разумеется, согласно *основной концепции* (см. «Предисловие» и разделы 1–2), в рамках культурно-исторического дискурса. И начинается эта линия с квадратных уравнений, с Пифагора и других древних греков, и продолжается она через алгебру Древнего Востока — это, на наш взгляд, весьма поучительно, узнать, что же было с математикой в первом тысячелетии нашей эры, познакомиться с примечательными ее деятелями, от *аль-Хорезми* до *Омара Хайяма* (который должен быть «прославлен в веках» не только как великий поэт, но и как великий математик, видевший будущее математики аж до времен *Декарта* и еще на 200 лет вперед!), от *Абу Камиля* до *Альгазена*... И дальше идет дорога через *Фибоначчи* до *Луки Пачоли*, который утверждает, что кубические уравнения решить нельзя... А дальше фейерверк первой половины XVI века: кубические уравнения поддались математикам, а с ними и уравнения четвертой степени!

Это первые три параграфа главы 1. Следующие три параграфа нацелены на «вершину» школьной алгебры — на *теорему Виета*. Она в каком-то смысле столь же проста для уравнений (многочленов) произвольной степени, сколь и для уравнений квадратных. Чтобы показать это, приходится нарушить «естественный ход истории математики» и перескочить из XVI века в XVIII: в XVI в. хорошо умели делать то, что научились и хорошо объяснять в веке XVIII[1]. Речь о *теореме Безу*; до 1970-х гг. она входила даже в *основной* курс для старших классов, и мы в двух параграфах реабилитируем ее в полной мере. Основное следствие — возможность разложения многочленов: $p(x) = (x - \alpha)q(x) \iff p(\alpha) = 0$.

Раз возникнув, разложения тянут за собой *метод разложения решения рациональных алгебраических уравнений* — отысканием рациональных корней и методом неопределенных коэффициентов (заметим: в том и другом случаях мы *как бы* следуем *Декарту*). Это и теоретический, и важный утилитарный вопрос или *метод*. Отметим, что еще раньше, в начале главы, затрагиваются два других «кита»-метода, на которых

[1]Вспомните, что писал *Борхес* по этому поводу — см. «Предисловие».

стоит основная методика решения рациональных алгебраических уравнений: *метод замены* (на примере *линейной* замены $x = z + \lambda$) и *метод сведе́ния уравнения к системе* (применяющийся при выводе *формулы Кардано*).

Тут уже близка и *теорема Виета*, которую удобно формулировать сразу в общем случае *полностью разложимых многочленов* — представимых как $p_n(x) = x^n + ... = (x - x_1)...(x - x_n)$. Мы стараемся получить максимум из этой теоремы, включая *формулу бинома Ньютона* и *треугольник Паскаля* как легкое приложение-«приключение» с *алгоритмом Руффини–Горнера* деления многочлена на двучлен! Однако саму теорему Виета и связанные с ней вопросы мы выделили в отдельный и весьма пространный параграф, где связали ее с комбинаторикой перестановок (перестановок корней, от которых, вообще-то, путь к *теории Галуа*) и сочетаний. Этот параграф помечен как дополнительный и предназначен, по замыслу, для самостоятельной его проработки продвинутыми или преуспевающими учащимися. Впрочем, учитель может включить этот параграф (§ 1.7*) и в основные занятия, потратив на него запланированные 10 часов (уроков) резервного времени.

Дойдя до «вершины школьной алгебры» — *теоремы Виета*, — мы останавливаемся на этом пути, ибо далее уже нужно вести речь о *комплексных числах* и об *основной теореме алгебры* (о существовании комплексного корня или о *полной разложимости* любого полинома над полем $\mathbb{C}$). Мы здесь останавливаемся по двум причинам: во-первых, этот путь *удаляет* нас от нынешней школьной тематики (хотя *комплексные числа*, равно как и теорема Безу, входили до 1970-х гг. в основную тематику); во-вторых, сами комплексные числа (необходимость «реабилитации» которых при профильном обучении математики, на наш взгляд, очевидна) лучше всего ложатся в другую «колею» — в *линию развития понятия числа и алгебраических числовых структур*. А эта линия, вместе с *линией развития понятий функции и элементарной функции*, выходит за временны́е рамки данного элективного курса.

Другое ответвление от главы 1 учебного пособия — *анализ вопроса о разрешимости уравнений в радикалах*. Разумеется, о самих теориях *Руффини–Абеля–Галуа* не может быть и речи, однако и рассказ об этих математиках и их творчестве без подкрепления хотя бы комплексными числами (основной теоремой алгебры) довольно бессмыслен, поэтому и его мы опускаем. Однако, и это гораздо больше значит для понимания упомянутого выше вопроса о разрешимости уравнений в радикалах — это приводимый далее *пример неразрешимости задачи на построение циркулем и линейкой*, т. е. *неразрешимости уравнения в квадратных радикалах*. Поскольку для уравнений *низших* степеней 3 и 4 критерий раз-

решимости/неразрешимости был дан *Декартом* в его «*Геометрии*»[1], такой пример (это невозможность *удвоения куба*) естественно «выскакивает» при рассмотрении декартовой алгебры и *алгебраической теории геометрических построений циркулем и линейкой*, логично включающейся в тематику главы 2 учебного пособия. Заметим, что тема *геометрических построений* имеет значительное утилитарное значение: во-первых, повторяется, а значит, закрепляется уже пройденное в курсе геометрии основной школы, во-вторых, это повторение может быть направлено на подготовку к грядущим и возможным устным вступительным экзаменам, на которых эта тема весьма популярна.

Переходя к тематике главы 2, прежде всего укажем на ее «эклектичность» — или, точнее, многоплановость, или большее, по сравнению с главой 1, разнообразие по вводимым понятиям и привлекаемым методам. Здесь нет какой-то единой линии — три параграфа объединены только тем, что их основными фигурантами являются трое крупнейших ученых, явившихся *непосредственными* предшественниками тогда еще только зарождавшегося *математического анализа*: это *Галилео Галилей, Рене Декарт, Пьер Ферма.* В главе 2 убедительно, на наш взгляд, развенчивается популярный миф о том, что Декарт придумал «декартову систему координат» — здесь куда больше вклад Ферма. И напротив, Декарту отдается сполна за его революционные заслуги в создании *настоящей* алгебры, которую сам он предпочитал называть «всеобщей математикой» (напомним: *математика* тогда, да и много позже, именовалась *геометрией*; лишь постепенно обрела права *арифметика*, а потом и *алгебра*).

В § 2.1 говорится о начале «новой науки» — у Галилея снаряд летит уже по параболе, скорость падения не зависит от массы тела, нельзя установить, двигаетесь ли вы равномерно и прямолинейно или покоитесь... Декарт вводит единичный отрезок, обозначения для степеней, впервые записывает уравнения практически в современном виде и строит их корни, пока только положительные, исходя из алгебраических формул... Прогресс огромный, а ведь еще не так давно витийствовал[2] «Галльский Аполлоний» Франсуа Виет.

В § 2.2 объясняется, наконец, кто же и когда придумал *координаты.* Мы возвращаемся к настоящему *Аполлонию* (в III в. до н. э.), легко получаем из алгебраических уравнений (некоторые) свойства *конических сечений*, учимся преобразовывать координаты. И уж заодно привязываем к системе координат построения циркулем и линейкой, запросто расправляемся (в *теории* запросто!) — видимо, вслед за Виетом, — с *задачей Аполлония* о построении окружности, касающейся трех данных. Тут же находим критерий построимости, скажем, числа или отрезка — здесь мы уже следуем, наверное, *Гауссу* (1799) или *Вантцелю* (1837; вот такой диапазон во времени: от 1637 до 1837!). При этом приходится оперировать якобы с новым, но не так уж и незнакомым понятием *числового*

[1] Впрочем, задолго до него нечто в том же роде высказал *Омар Хайям.*

[2] Так и хочется сказать «*виетствовал*».

поля, а заодно — *квадратичного расширения поля*. Мы считаем, что эти понятия *полезно ввести* не только потому, что они помогают доказать невозможность удвоения куба и трисекции угла (конкретно, в 60°), но и для того, чтобы встряхнулось наше косное логическое левополушарное мышление...

И вот в последнем параграфе 2.3 всплывает, наконец, первое понятие, относящееся по своей сути не к алгебре или геометрии, а к *математическому анализу* — понятие *наибольшего/наименьшего значения*. Сначала оно плавает в историческом «бульоне» диоризма[1], т. е. не отделяется от алгебры. Шажок в сторону анализа делает *Иоганн Кеплер* со своей знаменитой наилучшей австрийской бочкой... А дальше «вступает в игру» *Пьер Ферма*, придумавший «*Метод отыскания наибольших и наименьших значений*», от которого всего шага два до методов собственно математического анализа.

В этом же последнем параграфе затрагивается принципиально важный «*принцип Ферма*» в оптике и его работы в области теории чисел, в которой он был революционером не меньшим, чем его соперник Декарт в алгебре.

Взаимодействие математиков Европы, а особенно Франции, было бы труднодостижимо (а такое взаимодействие ученых как тогда, так и в настоящее время есть залог прогресса в математике), если бы не скромный монах-францисканец *Марен Мерсенн*, организовавший в своей келье в центре Парижа чуть ли не Академию наук. Его кружок и стал основой будущей Парижской Академии — с постепенным образованием Академий и в других странах начался новый этап в развитии наук и, в частности, математики. Об этом и говорится в последнем пункте последнего параграфа.

За пределами главы 2 и данного элективного курса остались некоторые из предтеч математического анализа — такие, как гениальный *Блез Паскаль* (1623–1662), систематизатор *Джон Валлис* (1616–1703), замечательный универсал и первый президент Парижской Академии *Христиан Гюйгенс* (1629–1695). Их время и их работы еще ближе к математическому анализу, и они заслуживают отдельного рассмотрения. То же относится и к еще одному достижению *Ферма* и *Декарта*, ставшему предметом перепалки между ними (через посредство *Мерсенна*!) — имеется в виду *метод построения касательной* к более-менее произвольной кривой. Этот вопрос лежит скорее уже *внутри* математического анализа.

Что касается домашних заданий, задач и упражнений для самостоятельной работы. Мы полагаем, что при изучении данного элективного курса специальные домашние задания «на закрепление материала», включающие какие-то вопросы, упражнения, задачи и задания, *не нужны*. Задания могут состоять в подробном прочтении соответствующих текстов и в их личной интерпретации, в составлении собственного крат-

[1] Условия существования решений какого-то уравнения.

кого конспекта пройденного, в котором выделяется «базисное» математическое содержание — например, преобразования выражений, примеров которых в учебном пособии довольно много. Следует отметить, что почти все эти примеры принадлежат крупным математикам своего времени, и проводимые ими преобразования далеко не тривиальны, хотя и могут показаться такими на первый взгляд (тем более, когда их преподносит учитель). Напротив, они часто остроумные, не очевидные (а ныне школьники поневоле приучаются ко многим *очевидным* по своей сути преобразованиям, да и вообще маловато в них практикуются), довольно изощренные. Разобраться с ними (например, с различными методами вывода *формулы Кардано* или способами разложения уравнений степени 4 «по *Феррари*» и «по *Декарту*») до уровня *самостоятельного воспроизведения* — это достойное домашнее задание, отвечающее дидактическим целям курса.

Параллельно конспектируется и гуманитарное содержание — с выделением самого главного. Можно предложить учащимся составить и постепенно пополнять хронологическую «карту» или «ось времени», на которой отмечать годы жизни ученых и важнейшие датированные математические факты — от открытий до, например, введения тех или иных понятий или обозначений. Примечательные и весьма подробные хронологические перечни и карты можно найти на очень хорошем шотландском сайте по истории математики и математиков www-history.mcs.st-and.ac.uk (конечно, на английском языке).

Несмотря на рекомендацию воздержаться от специальных домашних заданий и ограничиться заданиями типа проработать пройденный материал и повторить известный материал основного или профильного курсов с тем, чтобы легче и эффективнее усваивать следующую тему, к той и другой главе даются «*Упражнения, задачи и задания*». Их предназначение — отнюдь не усугубление нагрузки учащихся. Они даются, во-первых, с тем, чтобы *преуспевающим* ученикам «дать пищу уму» (при необходимости), во-вторых, чтобы можно было всем ученикам воспользоваться некоторым набором задач и упражнений утилитарной, экзаменационной, конкурсной направленности. Например, как уже говорилось, в главе 1 рассмотрены основные методы решения рациональных алгебраических уравнений: замена (линейная), разложение, сведение к системам. И в «Упражнениях» к этой главе дан небольшой список уравнений, решаемых этими методами. То же относится к задачам на построение алгебраическим методом и на метод координат (для отыскания геометрических мест точек), помещенным в «Упражнениях» к главе 2.

К некоторым задачам, заданиям (под *заданиями* мы понимаем цепочки или циклы связанных одна с другой задач), упражнениям в данном методическом пособии даны краткие указания, комментарии, а в некоторых случаях — полные решения, помещенные после комментариев к параграфам.