Земляков А. Н.

Элективный курс «АЛГЕБРА$^+$: рациональные и иррациональные алгебраические задачи»

10/11 классы

МЕТОДИЧЕСКИЙ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Пособие для учителя

Москва — 2004

Данное пособие состоит из концептуальной части (раздел 1), содержащей *методический и методологический комментарий* ко всему курсу в целом, рассматриваемому в более широких рамках *углубленного математического образования* в старших классах средней школы и, конкретно, подготовки школьников к *продолжению образования*; формально-описательной части (раздел 2), содержащей *программу* курса и комментирующие ее дополнения, а также общую характеристику *учебного пособия*, и практической части (раздел 3), в которой дается собственно *методический комментарий* к учебному пособию. В «Дидактическом приложении к разделу 3» приведены примеры контрольных работ по тематике учебного пособия и ориентировочные образцы оформления решения алгебраических задач.

В «Приложении 1» представлена концепция собственно *углубленного математического образования*, на основании которой разрабатывался представляемый здесь элективный курс.

Задача данного пособия — не только помочь учителю в проведении занятий рассматриваемого элективного курса, но и способствовать уяснению авторской педагогической и методологической точки зрения на проблемы углубленного математического образования и подготовки школьников, в рамках классов математического и естественно-научного профилей, к продолжению образования в вузе.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5

Раздел 1. О ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ПРОДОЛЖЕНИЮ ОБРАЗОВАНИЯ ПРИ УГЛУБЛЕННОМ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ

1.1. Учебная книга и цели курса 8
1.2. Подготовка к продолжению образования 10
1.3. «Факторы риска» 12
1.4. Как учиться учиться учиться? 15
1.5. Музыка, поэзия, математика... 17
1.6. Конкурсная алгебра 20

Раздел 2. ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «АЛГЕБРА ПЛЮС»

2.1. Цели и задачи курса. Знания, умения, компетенции 23
2.2. Программа курса 25
2.3. Примерное тематическое планирование 29
2.4. Общие и организационные рекомендации 29
2.5. Общая характеристика учебного пособия по курсу 31

Раздел 3. КОММЕНТАРИИ К КУРСУ

Тема 1. ЛОГИКА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Общие замечания и рекомендации по теме 33
§ 1.1. Алгебраические задачи, решения, равносильность 35
§ 1.2. Задачи с параметрами и логические алгебраические задачи 37
Комментарии и указания к упражнениям и задачам 38

Тема 2. МНОГОЧЛЕНЫ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Общие замечания и рекомендации по теме 38
§ 2.1. Корни многочленов. Теорема Безу 40
§ 2.2. Разложение многочленов. Теорема Виета и комбинаторика 41
§ 2.3. Уравнения низших степеней 43
§ 2.4. Уравнения разных степеней. Методы упрощения 44
Комментарии и указания к упражнениям и задачам 45

Тема 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Общие замечания и рекомендации по теме 46
§ 3.1. Рациональные алгебраические уравнения 47
§ 3.2. Рациональные алгебраические неравенства 47
Комментарии и указания к упражнениям и задачам 48

Тема 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Общие замечания и рекомендации по теме 49
§ 4.1. Уравнения с несколькими переменными 50
§ 4.2. Решение систем. Метод подстановки. Однородные системы 51
§ 4.3. Решение систем: метод замены. Симметрические системы 52
§ 4.4. Решение систем: метод разложения. Частные методы и приемы . 53
§ 4.5. Системы с тремя переменными 54
Комментарии и указания к упражнениям и задачам 55

Тема 5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Общие замечания и рекомендации по теме 55
§ 5.1. Уравнения с радикалами 57
§ 5.2. Неравенства с радикалами 59
§ 5.3. Уравнения и неравенства с модулями 59
Комментарии и указания к упражнениям и задачам 60

Дидактическое приложение к разделу 3 65

Приложение 1. Цели и содержание углубленного математического образования 81

П1.1. Зачем вообще учатся? 81
П1.2. Кто учится? 84
П1.3. Математика, сознание, воспитание 86
П1.4. Математика и духовная культура 89
П1.5. Математика и цивилизация 92
П1.6. Математика и мировоззрение 95
П1.7. Содержание углубленного математического образования 99
Список литературы 103

Приложение 2: УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН xx
Приложение 3: ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ xx

ПРЕДИСЛОВИЕ:

Место данного курса в системе обучения математике в средней школе

Все серьезные вещи нужно делать предельно весело!

Лозунг французских студентов, 1968

Курс «Алгебра плюс» (далее просто **А+**) систематизирует и упорядочивает, закрепляет и углубляет знания, умения и навыки учащихся в области, которую мы условно называем «элементарной алгеброй». Речь идет о линии математического образования, начинающейся еще в младших классах и направленной на практическое научение умениям решать уравнения, неравенства, системы с переменными/неизвестными — все такие задачи будем называть алгебраическими (в широком смысле).

Систематизация и упорядочение основывается на логической структуре этой области математики, на классификации алгебраических задач по логическому строению (элементарные алгебраические задачи: уравнения, неравенства; сложно/составные задачи: системы уравнений и неравенств, их совокупности, совокупности систем и т.д.; логические и квантворные задачи: анализ вопросов о существовании или единственности решений, о числе решений в зависимости от параметров, о следовании или эквивалентности задач с параметрами).

Закрепление и углубление знаний учащихся, полученных в курсе алгебры основной школы и в базисном/профильном курсе алгебры и начал анализа в старших профильных классах основывается на систематизации задач в соответствии с типами выражений/функций, фигурирующих в задачах (рациональные и иррациональные алгебраические, в узком смысле, задачи; тригонометрические, показательные, логарифмические задачи) и, главное, на методах (и приемах) решения задач (среди общих методов — переход к следствиям, равносильные преобразования задач, методы замены и разложения, функциональные методы, геометрическая/графическая интерпретация и др.).

В данном элективном курсе мы сосредоточиваемся на *рациональных и иррациональных алгебраических задачах*. Это первый и необходимый этап научения *методам решения алгебраических задач*, в том числе и трансцендентных (тригонометрических, показательных, логарифмических, смешанных), которые следует проработать специально. Нисколько не преувеличивая, можно сказать, что умение решать указанные трансцендентные уравнения, неравенства и проч. основано на знании приемов решения стандартных задач такого рода и на умении справляться с алгебраическими задачами в узком смысле: рациональными и иррациональными.

Элементы подобного подхода к задачам есть и в основных курсах. Задача курса **A+** в том, чтобы определенную часть умений учащихся довести до уровня навыков, но навыков осознанных, основывающихся на должном уровне компетентности учащихся, достигаемом не за счет только тренинга/«натаскивания», а благодаря именно систематичности и «методологичности» обучения методам решения задач от среднего до высокого уровня сложности. С этой точки зрения курс **A+** имеет сугубо утилитарную направленность на подготовку учащихся к продолжению образования в вузах с высокими и повышенными требованиями к математической подготовке выпускников средней школы.

В подобных курсах большое значение имеет не только внешняя мотивация учения (направленность на подготовку к вступительным экзаменам по математике), но и внутренняя, внутриматематическая мотивация к усвоению материала. Она может быть реализована за счет адекватной поставленным целям (см. ниже) методики изучения. Задачи и методы их решения важны не сами по себе, и отнюдь не только потому, что они встречаются на конкурсных экзаменах и нужны для успешного поступления (т.е. для реализации возможности продолжения образования). Они важны и как входящие в саму науку математику и бывшие на каком-то этапе развития математики практически основными составляющими математики как науки. Объяснить это учащимся, довести до уровня сознательного понимания возможно лишь посредством методически целесообразного сочетания обучения инструментальным навыкам и анализа изучаемых задач и методов их решения с точки зрения т. н. высшей математики. Чрезвычайно важно для достижения подлинной осознанности изучаемого материала видеть, как он соотносится собственно с предметом изучаемого в математике не как в учебном предмете, а как в науке. Поэтому по мере возможности и необходимости традиционные и не очень вопросы элементарной математики раскрываются с точки зрения высшей (а иногда и не очень высшей!) математики. Таковы алгебраические подходы к решениям таких задач, как упрощение и разложение уравнений/неравенств, использование однородности и симметрии при решении уравнений/систем, монотонности и ограниченности для исследования уравнений/неравенств/систем, привлечение производной к анализу и решению задач с параметрами и т. д. (см. «Программу курса»).

Тесная связь курса **A+** с основными курсами алгебры/алгебры и начал анализа дает возможность компактного изучения данного курса. Многие вопросы, предусмотренные программой, фактически сводятся к повторению/закреплению уже известного учащимся, они могут быть изложены сжато, конспективно или же предложены учащимся для самостоятельной проработки по учебному пособию к рассматриваемому курсу (пособие рассчитано в том числе и на самостоятельное изучение материала, так что указанный подход вполне возможен). И на базе этого

в рамках лекционно-семинарской системы/манеры проведения занятий (т.е. при постоянном активном соучастии школьников, во взаимно активном диалоге, что также отчасти заложено в учебном пособии) учащиеся знакомятся с новыми методами, типами задач, новыми взглядами на уже пройденное, научаются использовать методы высшей арифметики (теории чисел), алгебры (теории многочленов) и математического анализа (дифференциального исчисления) при решении задач элементарной математики. Именно указанной спецификой методики преподавания курса **A**+ объясняется обширность затрагиваемого программой материала (до 50% содержания курс **A**+ делит с основным/базисным/профильным курсами, но включает это содержание в целях выдержанности линии на систематизацию и закрепление).

Ввиду необходимости согласованности в изучении данного элективного курса в тесной связи с базисным/профильным курсами предлагается спланировать курс **A**+ на 2-е полугодие обучения в 10 классе (темы 1–3) и 1-е полугодие в 11 классе (темы 4–5). Разумеется, возможны те или иные сдвиги и вариации тематического планирования, при которых, однако, необходимо учесть специфику линейного построения курса и учебного пособия — с тем, чтобы не было значительного временного отрыва от предшествующих тем.

* * *

В следующем далее разделе 1 излагается авторский взгляд на методологию, методику и организацию подготовки учащихся к продолжению образования в рамках углубленного или профильного обучения математике. Ознакомление с ним поможет учителю лучше понять заложенные в представляемом элективном курсе идеи, будь то относящиеся к содержанию и методам обучения или целевые методологические установки. «Сугубый практик» может пропустить этот раздел и сразу перейти к конкретике курса **A**+ — к методико-методологическому разделу 2 или даже «чисто практическому» разделу 3.

Раздел 1. О ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ПРОДОЛЖЕНИЮ ОБРАЗОВАНИЯ ПРИ УГЛУБЛЕННОМ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ

Не опасаясь упрека в педантизме, мы скорее склонны утверждать, что лишь основательность может быть занимательной.

Томас Манн

В этом разделе сначала формулируются *основные цели углубленного или профильного математического образования* и их связи с качествами учебных материалов, а далее рассматривается специфика *подготовки к продолжению образования* в профильных классах и затрагиваются многие сопутствующие вопросы. Отметим, что в «Приложении 1» приводится *обоснование* предлагаемой концепции углубленного математического образования вплоть до формулировки основных принципов отбора содержания такого образования.

1.1. УЧЕБНАЯ КНИГА И ЦЕЛИ КУРСА

В книге на каждой странице
Золотые да красные числа.

Александр Блок

Начну с изложения учебного материала в учебной книге. Я полагаю, что очень важным качеством любого учебника (не только «углубленного»!) является его **интересность**: как текста, как *литературного текста* — и в отношении языка и стиля изложения, и в отношении некоей (математической!) фабульности.

Кроме того, каждая «мини-тема», в тексте отраженная как рассчитанный на изучение, скажем, в течение одной недели параграф или его часть[1] (вместе с примерами и задачами), должна быть в определенной степени неким *завершенным*, цельным этапом, *продвижением* в изучении курса, должна приносить изучающему чувство удовлетворения. В идеале, на каждом этапе обучения обучаемый (или *обучающийся* — см. далее) должен получить определенное *интеллектуальное удовольствие*!

Понятно, сколь трудно этого достичь в учебном тексте, но к этому нужно хотя бы стремиться. Учебник — не справочник, не собрание понятий, фактов, примеров, задач, комментариев, etc. **Учебная литература — это тоже литература**[2], причем литература, в данном случае,

[1] В учебном пособии по элективному курсу «*Алгебра плюс*» некоторые параграфы фактически выходят за рамки одной недели.

[2] И учебник А. П. Киселева по геометрии — *литература*, причем близкая, с нынешних позиций (на мой взгляд), к science fiction!

для детей, для юношества, со всеми вытекающими отсюда следствиями и требованиями к учебному тексту[1].

Это мое давнее и глубокое убеждение, и когда-то я наткнулся на сходные взгляды Клейна, высказанные без малого век тому назад, и как раз по поводу преподавания алгебры, арифметики и анализа[2]. Он, в частности, писал, что ученика «*нужно не только услаждать и поучать, но что в нем надо будить силы, которые вели бы его дальше, побуждать его к самостоятельной деятельности*», уделяя достаточно «*внимания к собственно воспитательной задаче*». М. Я. Выгодский писал, что, «*имея в виду показать математическую дисциплину в ее целостности, Клейн старается возможно шире охватить ее возможные применения и вместе с тем представить ее — и всю математику — как составную часть общечеловеческой культуры*».

Таким образом, учебный текст должен *стимулировать интерес* обучающегося к предмету, показывать его *общекультурную ценность*. Разумеется, неинтересный текст мало в этом поможет. В то же время «интересность» ни в коем случае не может быть самоцелью, как то допустимо в популярной литературе. *Средства* достижения «интересности» и формирования интереса обучающихся *должны быть адекватными целям* учения. И они как бы определяют как содержание и структуру курса, так и методику подачи учебного материала.

Сначала *о целях углубленного математического образования в рамках средней школы*, как я их понимаю[3]. Остановлюсь на них кратко — более подробно некоторые из них изложены и обоснованы далее, в «Приложении 1». К сожалению, при этом придется прибегнуть к «высоким словам».

Основная посылка состоит в том, что *фундаментальной* целью углубленного математического образования является НЕ подготовка будущих математиков (физиков, инженеров, etc.), а *формирование на основе углубленного обучения математике сознательной и гармонически развитой личности*[4].

Дальнейшая наша концепция, прежде всего, включает **таксономию** — *иерархию приоритетов* — **целей образования**, которую мы сформулируем, минуя еще пока становящийся концепт «компетенции»/«компетентности» (о них будет речь в разделе 2).

---

[1] Как известно, для детей нужно писать так же, как для взрослых, но еще лучше!

[2] В книгах «*Элементарная математика с точки зрения высшей*» и «*Лекции о развитии математики в XIX столетии*»

[3] *В настоящее время*, хотя сравнение с теми проблемами, которые волновали Клейна, показывает их как бы «*вневременность*»

[4] Эта задача не исключает привлечения потенциала всех учебных предметов к ее решению, а напротив, усиливает роль, например, предметов гуманитарного цикла при углубленном математическом образовании. Известно: «*Специалист подобен флюсу...*»!

Важнейшими целями углубленного математического образования (далее УМО) являются: воспитание интеллектуальных и моральных черт характера[1], эстетического чувства; способствование формированию важнейших интеллектуальных умений и мышления, способностей ума; формированию сознания.

Далее, одна из основных целей УМО состоит в воспитании у школьников эстетического восприятия математики, формирования представления об исторически взаимообусловленном единстве математики с другими составляющими духовной культуры.

При УМО должна быть адекватным и доступным образом отражена математизация знаний и общественной практики.

Значительно должна быть усилена роль УМО в формировании научного мировоззрения — с этой целью в преподавание привносится знакомство с методологией математики, с математическим моделированием.

Наконец, УМО должно преследовать и традиционные социально-утилитарные цели, как то: развитие интересов, углубление и упрочение знаний и умений, подготовка к продолжению образования.

1.2. ПОДГОТОВКА К ПРОДОЛЖЕНИЮ ОБРАЗОВАНИЯ

Здесь нужно, чтоб душа была тверда;
Здесь страх не должен подавать совета.

Данте Алигьери

Только что, выдвигая *таксономию основных целей* углубленного математического образования, мы как бы напоследок указали на «*традиционные социально-утилитарные цели, как то*: *развитие интересов, углубление и упрочение знаний и умений, подготовка к продолжению образования*». Англичане в подобных случаях говорят про такие цели, установки: «**the last but not the least**» — так сказать, «**последние по списку, но не последние по значению**».

Что касается *развития интересов, углубления и упрочения знаний и умений*, то на достижение этих целей направлен *весь курс в целом, всё пособие целиком* — и учебный текст, и система упражнений. Несколько более деликатно обстоит дело с «**подготовкой к продолжению образования**». Здесь, на наш взгляд, необходима полная ясность, четкость, определенность.

Прежде всего, возвращаясь к *целеполаганию, целенаправленности* курса математики в целом и рассматриваемого элективного курса **А+** в частности, нужно *явно разделить* ДВЕ ЦЕЛИ: **подготовку к дальнейшему обучению**, *включая и помощь в выборе вуза*, и **подготовку к**

[1] «*... Интеллектуальные привычки имеют свой моральный отголосок*», — *Анри Пуанкаре*, очерк «*Мораль и наука*». *А.Н.Уайтхед* в своем очерке «*Математика и добро*» упоминает знаменитую лекцию Платона на тему «*добра как такового*», в которой лектор говорил почти исключительно о математике!

поступлению — *в выбранный вуз*. ***Вторая задача гораздо проще решается*** — независимо от типа вступительных испытаний (от конкурсных экзаменов, собеседований до намечающегося в проекте «Единого государственного экзамена»), — ***при условии, что хотя бы в какой-то мере успешно решена первая задача***, т. е., фактически, задача подготовки к самостоятельному, «вузовскому» подходу к обучению. **Готовность дальше учиться — самая важная предпосылка к действительной готовности и к поступлению** (см. эпиграф!).

Представим себе *реальную ситуацию*, скажем, *в начале учебного года* в классе, в котором предполагается математику изучать на продвинутом уровне. И пусть это будет даже не группа желающих изучить элементарную алгебру на продвинутом уровне, а *класс специально отобранный* на основе каких-то испытаний (скажем, в ФМШ при МГУ — ныне СУНЦ — кроме письменных и устных испытаний проводилась еще и 2–3-недельная летняя школа, в которой выявлялись и обучаемость, *способность к обучению*, и интерес к предмету). *И практически наверняка образовательная картина в таких группе/классе будет примерно следующая.*

1. Учащиеся (многие или некоторые; далее мы это уточнение будем опускать) имеют слабые *вычислительные навыки* — чаще всего, в отношении действий с дробями (в частности, не могут вычислить — увидеть! — наименьший общий знаменатель).

2. Учащиеся плохо владеют *навыками алгебраических преобразований* — раскрытием скобок, вынесением общих множителей, упрощением алгебраических дробей, их приведением к общему знаменателю.

3. Учащиеся неуверенно *разлагают алгебраические выражения на множители* (в том числе, и квадратные трехчлены).

4. Учащиеся часто совершают логические ошибки (типа утверждения о том, что они якобы «*находят корни*» квадратного уравнения «*по теореме Виета*»!).

5. Учащиеся часто *неверно избавляются от знаменателей* как *при решении уравнений* (не проверяют отличие всех знаменателей от нуля), так *и при решении* простейших *неравенств* (не учитывают, что при умножении неравенства на выражение может меняться знак неравенства).

6. Учащиеся неуверенно производят *действия со степенями с дробными показателями.*

7. Учащиеся слабо владеют *техникой построения простейших графиков* — линейных и квадратичных функций, графиков обратной пропорциональной зависимости: строят их «по точкам», заполняя ненужные (большей частью) таблицы, а вовсе не ориентируясь на «основные» точки (вершины парабол, точки пересечения с осями); часто путаются даже в угловых коэффициентах прямых.

На этом перечень характерных упущений в основных для курса алгебры в средних классах умениях и навыках закончим. Они, разумеется, будут *несколько* (мягко говоря!) *мешать* при изучении уже первых поня-

тий и конструкций нового курса (т. е. «*Алгебры плюс*»), но избавляться от них нужно **постепенно и индивидуально**. ***Главное — вовремя обратить внимание на те или иные пробелы и помочь учащимся избавиться от них.***

[Не могу не остановиться на *причинах*, в которых, на мой взгляд, коренятся эти, в общем-то, *массовые* упущения в знаниях и умениях выпускников основной школы. При этом я основываюсь не только на наблюдениях и на анализе учебников для средних классов, но и на «личном эксперименте[1]» — обучении (самого обычного, не «отобранного»!) класса с 5-й по 9-ю параллель. Я считаю, что в основе недостаточной прочности знаний выпускников основной школы лежит *методический просчет* (или даже психолого-методическая ошибка) при разработке системы упражнений в учебниках математики (5–6 кл.) и алгебры (7–9 кл.). Основной *недостаток состоит в недопустимо малом наборе упражнений на закрепление материала*, проходимого именно в данном конкретном параграфе. Каких только упражнений не дается к каждому параграфу — это и повторение только что пройденного, и пропедевтика будущего, и повторение уже давно пройденного, и вообще — упражнения «ни про что». В итоге на непосредственно пройденный материал приходится разве что треть упражнений. Это особенно мало в случае, когда изучается материал, умения в котором нужно довести *до уровня навыков* (скажем, сложение обыкновенных дробей; к счастью, калькуляторы, удобно умеющие это делать — редкость[2]). И неудивительно, что *недостаточное внимание к закреплению основного*, текущего материала приводит к упущениям в итоговых (на выходе из основной школы) знаниях и умениях учащихся.]

1.3. «ФАКТОРЫ РИСКА»

Учителя: *Вы мальчики, способные на всё!..*
Ученики: *И мы, в самом деле,*
Становимся способными на всё!..

Юлий Ким

Рассмотрим теперь *психологические* или, скорее, *психолого-педагогические черты*, нередко присущие учащимся в нашем воображаемом классе (в группе). Частью они обусловлены психолого-возрастными факторами, во многом — предшествовавшим опытом учения и общения с соучениками и учителями в школе, часто — психологическими установками семьи. Последнее немаловажно: согласно Карлу Густаву Юнгу, крупнейшему психологу XX в., подростки остаются психологически связанными со своими родителями — а это касается и системы ценностей, и социально-ролевых установок, etc, — до 21–23-летнего возраста (юноши — до 23 лет, девушки — до 21), и не учитывать это учителю нельзя.

[1] Это был *эксперимент над самим собой*!

[2] ***Пока*** редкость!

Нас интересуют ТЕ психолого-педагогические аспекты, которые *могут затормозить развитие* учащегося в выбранном им направлении. Заметим только, что некоторые моменты, негативно влияющие на личность в зрелом возрасте, могут быть позитивными чертами ищущей себя юной личности (скажем, такова может быть высокая степень ригидности[1] — своеобразная «юношеская паранойя», проявляющаяся упорством в достижении цели) — и это тоже учитель должен учитывать.

Какие-то из следующих положений могут показаться неожиданными, но всё это вынесено из тридцати с лишним лет общения со старшеклассниками (и студентами — не только младшекурсниками). Перечислю по порядку, не разграничивая чисто психологические моменты от «психолого-методических».

1. Во время учебы в средних классах (особенно при «всеобуче») так называемые «*способные*» ученики находятся в *не очень благоприятных* условиях, ибо именно им часто не хватает учительского *внимания* и *поддержки* (усилия учителя обращены, главным образом, на «*слабых*», плохоуспевающих!), а также и *среды общения*, адекватной их интересам и способностям. В таких условиях к старшим классам способные превращаются в обыкновенных «*серых*», а то и вовсе в неблагополучных. **Что делать?**

Не вдаваясь в обсуждение, укажем, что *дифференциация образования, переход к формированию профильных классов — один из выходов* из положения. При этом я считаю дифференциацию «действительно действенной» *только на старшей ступени*; в средних классах нужна и возможна (на мой взгляд) какая-то «предварительная» дифференциация, так сказать, *преддифференциация, предпрофильная подготовка*, дающая учащимся *много разных вариантов* проявить, попробовать себя. Но пока такой системы в средних классах нет, неизбежно проявляется следующая, уже в большей степени психологическая проблема.

2. Вопреки довольно широко распространенному мнению, учащиеся, особенно рассматриваемого возраста (9–10, и даже 11-й класс), *часто недооценивают себя* (чаще, чем переоценивают!). Зачастую они и *не знают о своих способностях и возможностях* (хотя бы потому, что им и неоткуда было это узнать). Разумеется, такая ситуация затрудняет самореализацию учащихся. Попытку «узнать себя» с помощью расплодившихся ныне (и зачастую сомнительных по части своей валидности) тестов можно рассматривать лишь как «развлечение» (впрочем, сомнительное же!). Конечно, школа предоставляет известный набор «форм работы», направленных на разрешение проблемы «самоосознания» — кружки, факультативы, олимпиады. Но уже «оглупленные» (или «углупленные»?!) своим прошлым опытом (см. тезис **1**) и недооценивающие себя, многие в принципе способные (на многое, даже, быть может, на

[1] По Ширвиндту — «упёртости»!

всё!) школьники проходят мимо всего этого. Таким образом, перед учителем стоит *задача преодоления неадекватно низкого уровня самооценки школьников* — как перед формированием профильного класса, так и уже в учебно-воспитательном процессе. Без этого даже задача продолжения образования в некоторой степени обессмысливается.

Чтобы сформировать *работоспособный* (для определенности ограничимся математикой) класс, нужно еще до его формирования найти *достаточно ненавязчивые, необязательные, безотносительные к собственно учебному процессу формы работы* со школьниками, *открытые для всех и помогающие узнать свои способности, раскрыть свои возможности*. Это могут быть *летние школы* (типа летних школ ФМШ при МГУ) или *лагеря* (по типу лагерей Малой академии наук Крыма), а также *открытые испытания*, диагностирующие НЕ ЗНАНИЯ–УМЕНИЯ–НАВЫКИ[1], а ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СПОСОБНОСТИ — уровня, например, стандартных американских испытаний типа ***SAT*** (*Stanford Achievements Test*), ***GRE*** (*Graduate Record Examination*) или даже ***AMHSE*** (*Annual Mathematics High School Examination*). Такие испытания, которые особенно удобно (и психологически наиболее приемлемо для школьников) проводить в компьютеризированной форме, с одной стороны, должны быть «*ни к чему не обязывающими*» (как и обучение в летней школе), а с другой стороны, результаты таких испытаний как раз могут служить достаточно объективной основой как для предварительной самооценки школьников, так и для формирования профильных классов. Отметим, что, по крайней мере, по отношению к математике, ни школьная успеваемость, ни обычные экзаменационные отметки не могут служить надежным критерием отбора в профильные классы, ибо на эти оценки накладывается масса посторонних факторов, которые, особенно в свете тезиса **2**, как раз должно исключить. Я неоднократно убеждался в этом на собственном опыте.

Но это всё было *преамбулой*. Перейдем к ситуации реального учебно-воспитательного процесса в нашем «виртуальном» классе (группе).

3. Возможная неадекватно низкая самооценка школьника может усугубиться из-за трудностей, иногда возникающих *на начальном этапе знакомства* с предметом (да и с учителем!). Именно поэтому *вводная тема должна быть как можно более доступной* (и *интересной*, между тем!) *и должна быть как можно более доступно, понятно, наглядно изложена*. И лучше всего, если она сразу свяжет «*незнакомое*» — со «*знакомым*», «*новое*» со «*старым*» — пусть даже «*хорошо забытым*». Здесь, как в начальных классах, *оценивание* успехов школьников должно быть *благожелательным и щадящим*.

4. Еще один психологический момент, который особенно чувствуется, когда в классе собираются школьники не просто из *разных* классов, но

[1] И, упаси Господь, и НЕ IQ, то бишь «*коэффициент интеллектуальности*»!

и из *разных* школ, из *разных* мест, как это имеет место в ФМШ при университетах. У себя в классе, в школе ученик был (и привык быть!) *первым* или одним из первых. В новом классе так не получается. Учитель должен вовремя увидеть, оценить и максимально (деликатно, индивидуально) смягчить потенциально возможную стрессовую ситуацию.

5. Близкая ситуация: школьник привык выполнять «домашнее задание» *целиком* — скажем, решать все «заданные на дом» задачи. А в классе продвинутого уровня **а приори** *не все задачи могут «получаться», да и не должны*, вообще говоря. Главное, чтобы условия задач были *поняты*, чтобы к решению каждой задачи (каждый!) школьник приложил какое-то *интеллектуальное усилие*. Нет ничего плохого, если школьники будут как-то общаться по поводу домашних задач[1]. Специально акцентировать внимание на этом не нужно, а при успешном обучении достаточными будут простые *моральные регуляторы* — проявляющееся желание быть самостоятельно-самодостаточным, чувство собственного достоинства.

1.4. КАК УЧИТЬСЯ УЧИТЬСЯ УЧИТЬСЯ?

> ***Меня всегда впечатлял тот факт, что существует удивительное число людей, которые никогда не применяют свой мозг к делу, если этого можно избежать, и одинаковое с ними количество людей, которые непременно им воспользуются, но поразительно глупым образом.***
>
> *Карл Густав Юнг*

Следующие моменты можно назвать «*методико-психологическими*».

6. Существенную трудность для многих (поначалу — почти для всех) представляет вопрос: «***Как подступиться к конкретной задаче***?», — если только это не стандартная по формулировке, по содержанию или по степени трудности задача. Причина состоит, главным образом, в том, что в средних классах доминирует *обучение решению задач по образцам* (правда, как отмечалось выше, нередко без достаточной отработки). Задачи же *проблемного* (или «псевдопроблемного») *типа*: «**Существует ли** *нечто*?», «**А что будет,** *если ...*?», «**Приведите пример** *того-то и того-то* (или *такой-то и такой-то*)», — как бы «сбивают учащихся с толку». Сначала *разбирая подобные задания в диалоге с учащимися* (в таком стиле полезно преподносить и доказательства теорем, формулирование следствий, etc.), потом стоит давать какое-то (разумное!) количество таких заданий для работы в классе и для домашних размышлений.

Надо приучить школьников размышлять. Вообще привычка размышлять — качество полезное не только в математике (см. эпиграф!). Задавая вопрос (всему классу или конкретному ученику), обязательно

[1]По телефону или Интернету, или на спортплощадке! Я иногда говорю своим школьникам: «*Ведь не в лесу же живете*!» (хотя как раз в лесу!).

нужно давать время подумать — ***не подгонять***. Правда, здесь есть и *оборотная сторона*: школьник, вместо того, чтобы решать задачу, начинает «*думать*»! Когда на вопрос: «*Что ты делаешь*?», — ученик мне отвечает: «*Я думаю*!», — иногда приходится использовать фразу из известного анекдота[1].

В конце концов, школьники научиваются решать задачи, привыкают к простейшим эвристическим приемам, помогающим при этом: прежде всего, понять, ***в чем состоит задача***? ***что в ней известно***? ***что требуется найти***? ***а как это можно было бы сделать***? ***а не встречалась ли похожая задача раньше***? ***а что вообще я знаю по данному поводу***? ***а не отбросить ли часть условий*** (***требований***)? — и т. д. Все это относится, и даже в большей мере, к обучению решению задач по геометрии — в силу специфики самого этого предмета. Но мы не будем здесь обсуждать еще и эти проблемы.

7. *Умение решать задачи* — это важная, но не единственная составляющая УМЕНИЯ УЧИТЬСЯ, в данном случае, математике. И *главная методическая и педагогическая проблема*, которую хорошо бы разрешить в течение первого года углубленного изучения математики — НАУЧИТЬ(СЯ) УЧИТЬСЯ. Сюда входит многое: *умение слушать* (не перепутайте со «слушаться»!) учителя или своего одноклассника, *умение выделять главное* и записывать это главное в свой *личный конспект* (хорошо еще вести и «чистовой» конспект, записываемый уже после обдумывания всей темы и ... аккуратным почерком — или уж тем, какой есть!), *умение составлять компактные, красивые и удобные шпаргалки*. ***NB!*** *Шпаргалки* пишутся не для того, чтобы ими пользоваться непосредственно на контрольной работе, экзамене или на зачете, а для того, чтобы как следует (т. е. хорошо!) подготовиться к контрольной, экзамену, зачету! И *свои собственные шпаргалки* всегда лучше чужих или, тем более, «покупных» (продающихся на лотках или в магазинах)!!

Сюда же относится *умение* лаконично, но логически точно *изложить* (например, повторить) те или иные *рассуждения* (скажем, доказательство теоремы или формулы); *умение не только решить задачу*, как говорят, «в принципе», *но и логически полно и строго изложить решение*, как *устно*, так и *письменно*. Сюда же относится и *умение* (правильно и к месту!) *пользоваться математической и логической символикой*. Всё это не так просто дается, и для обретения соответствующих умений и навыков нужна, как спортсмену, *постоянная тренировка* и уже более общее, чем умение учиться, УМЕНИЕ РАБОТАТЬ.

Умение решать задачи, умение и желание учиться, привычка к интеллектуальной работе — это как раз те качества, которые можно считать *необходимыми* для продолжения образования в вузе. Они, вообще-то, являются и *достаточными* в совокупности с *усвоением программы*

[1] «*Чего тут думать*? *Трясти нужно*!» (конечно, в смысле «**Решать задачу!**»).

даже не углубленного, а базисного изучения математики. Однако *традиции проведения конкурсных вступительных экзаменов в вузы*[1] таковы, что, наряду с «обычной», «классической» элементарной школьной математикой возникла некая «надстройка» над школьной математикой, которую можно условно назвать «*конкурсной математикой*». Несмотря на некоторые ее «излишества» или, иначе говоря, «странности», выпускнику, собирающемуся преодолеть конкурсные экзамены, *необходимо затратить определенные усилия* и в овладении «странными» частями конкурсной математики[2]. Повторим: **для успешного обучения в вузе нужны не знания (умения, навыки) в конкурсной математике, а заявленные ранее общие умения и навыки;** *конкурсная же математика нужна только «одномоментно» — для успешной сдачи вступительного экзамена.* Справедливости ради отметим, что *некоторые* вопросы, традиционно затрагиваемые именно (и по преимуществу) конкурсной математикой, близки к *настоящей математике* (таковы, например, задачи с параметрами!) и имеют *самостоятельную образовательную ценность.*

Мой опыт показывает, что, если школьники научены работать (как следует учиться, то есть), овладели базисной (тем более, углубленной) программой по математике, то для подготовки их к конкурсным экзаменам в алгебраической части[3] достаточно, назовем так, «*специального курса* ***элементарной алгебры***», рассчитанного на 2 часа в неделю в течение полугода в классе с углубленным изучением математики и в течение года — в «обычном» классе (напомним: при этом требуется *действительное владение* ***всей*** *базисной программой* по математике, но отнюдь не только пресловутым «*Обязательным минимумом*»!).

1.5. МУЗЫКА, ПОЭЗИЯ, МАТЕМАТИКА...

> ***Музыка, математика, поэзия и мифотворчество — наиболее присущие человеку области его творческой деятельности, в которых проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии***
>
> *Герман Вейль*

Прежде, чем рассмотреть, как упомянутый спецкурс «*Элементарной алгебры*» соотносится с элективным курсом «*Алгебра плюс*», уделим некоторое внимание еще одному важнейшему психолого-педагогическому аспекту образования в классах с продвинутым изучением математики.

[1] Мы не будем здесь и сейчас обсуждать перспективу введение *единого государственного экзамена* с выдачей соответствующих *сертификатов.*

[2] Это типичный предмет деятельности репетиторов.

[3] Геометрия, в том числе и «конкурсная», имеет свою специфику, которую мы не обсуждаем.

Для этого вернемся к сформулированным в первом подразделе *целям углубленного математического образования*, для определенности, скажем, в классе физико-математического профиля, и сформулируем их чуть-чуть в другом порядке и несколько иначе — как *основные задачи учебно-воспитательного характера*, решаемые в таком классе.

Первая задача, которую мы ставим — *научить* (и приучить!) школьников *работать*, в том числе и *самостоятельно*, — в смысле *воспринимать, понимать, созидательно перерабатывать* (по-английски это звучит как «*проявлять креативные способности*» — чрезвычайно важное качество!) — *идеи, знания, информацию*. При этом приходится *отучать* школьников от школярского, рецептурного подхода к учению и к решению задач, что весьма и весьма не просто.

Вторая задача — *дать учащимся представление о математике, физике, об их взаимодействии* — истинное представление, которое весьма трудно извлечь из нынешних учебников. Приведем хрестоматийно-парадоксальное высказывание Нобелевского лауреата по физике *Юджина Вигнера* из его статьи «*Непостижимая эффективность математики в естественных науках*» (1959 г.): «*Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем.*» Оставляя последнюю сентенцию на ответственности Вигнера, заметим, что, понимая, что же такое суть математика, физика, школьники уже гораздо более осознанно делают выбор своего дальнейшего пути в образовании[1].

Третья задача относится к математике в более широком аспекте — как части общечеловеческой культуры. С одной стороны, речь идет о формировании *общей математической культуры — культуры логических рассуждений, эвристических подходов к проблемам и задачам*. С другой стороны, задачу нужно ставить шире — вести речь вообще *об общекультурном дискурсе в математике*. Здесь уместно привести слова одного из крупнейших математиков XX века *Германа Вейля*: «*Занятие математикой — подобно мифотворчеству, литературе или музыке — это одна из наиболее присущих человеку областей его творческой деятельности, в которой проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии.*» (1929 г.; в эпиграф вынесен другой перевод этого высказывания).

В какой-то степени третью задачу удается решать и средствами самой математики: через некоторое время школьники хотя бы отчасти начинают воспринимать *красоту математических конструкций и рассужде-*

[1] Характерно, что даже к концу 10 класса у учащихся, как правило, значительно повышается уровень образовательных притязаний — вместо вузов «среднего» уровня многие ориентируются уже на ведущие — МГУ, МФТИ и т. п. И тут иногда приходится как бы «умерять пыл», увы ...

ний, изящество математических моделей, etc. Но последний наш тезис, который мы сформулируем в духе Ю. Вигнера и как бы привязывая к только что приведенному высказыванию Г. Вейля, гораздо *шире*, что ли...

8. *При углубленном обучении математике необычайную важность*[1] *имеет гуманитарное образование.* Роль *гуманитарной компоненты культуры* для «технократов» хорошо понимают, скажем, в Японии. *Эмоционально-эстетическое восприятие* окружающего мира — *большое подспорье для творчества в любой области*, будь то математика, физика или техника. В конце 1996 г. в США вышел научный бестселлер «*Emotional Intelligence*» («*Эмоциональный интеллект*»), автор которой, *Даниэль Гольман*, утверждает: «*Великая революция XXI века состоит в реванше чувства над интеллектом*». *Интеллектуальный коэффициент* **IQ**, в США служащий мерилом способности человека выполнять ту или иную работу, как бы уступает место *эмоциональному коэффициенту* **EQ**, указывающему степень эмоционального развития.

Традиционно считается, что за эмоциональное развитие в школе «отвечают» традиционные «гуманитарные» предметы — литература, история, языки, «школьное» эстетическое воспитание. Но на самом деле речь нужно вести об *эстетическом воспитании в широчайшем плане*, добавляя к «вейлевским» поэзии и музыке искусство во всех его ипостасях. Если в решении первых двух сформулированных выше задач мы, хотя бы отчасти, можем преуспеть, то насчет гуманитарного образования, например, в физико-математических классах, даже в рамках только литературы, утешительного мало.

Основная «помеха» здесь состоит, скорее всего, в *несоответствии эмоционального настроя* учителей-гуманитариев и «физико-математических» школьников. Огромный вред приносит иногда явно формулируемое мнение о том, что «*Может быть, в физико-математических классах и не нужна ...*(*литература* ли, *история*) *в полном объеме*?» — **Нужна, да еще как!** «Нигилистический» настрой школьников учитель, даже если это учитель (гуманитарий) высочайшего класса, сможет преодолеть только при наличии *поддержки* со стороны преподавателей профилирующих предметов. Это утверждение подтверждает многолетний опыт ФМШ при МГУ, а также и опыт, например, мехмата МГУ (достаточно привести пример академиков П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова — математиков с мировыми именами, очень много сделавших для эстетического воспитания и школьников, и студентов).

Что касается рассматриваемого курса «*Алгебра плюс*», то действительную реализацию культурно-исторического дискурса в преподнесении математического материала можно в определенной степени рассматривать как некоторый вклад со стороны собственно математики в *эмоцио-*

[1] Можно читать: «*эффективность*».

нально-культурный фон образования. И, кроме всего прочего, нужно четко понимать, что *последние два года обучения в школе* по отношению к гуманитарному образованию, к эстетическому воспитанию для большинства школьников — это ситуация «*Сейчас или никогда*!». И это эдгаровское «**Никогда!**» было бы очень печальным исходом.

Отметим, что в «Приложении 1», в котором рассматривается наш подход к *углубленному/профильному математическому образованию* в целом, мы возвращаемся к затронутым выше вопросам о взаимосвязях между математикой и «остальной культурой».

1.6. КОНКУРСНАЯ АЛГЕБРА

Метод — это прием, примененный дважды.

Дьердь Пойа

Revenons à nos moutons[1]**.** Итак, **о подготовке к поступлению в вуз**, т. е. к конкурсным экзаменам (опять-таки, мы не касаемся перспектив *единого государственного экзамена*). Напомним, что мы уже *отделили* эту задачу от задачи подготовки к обучению в вузе. Нетрудно видеть, конкурсная математика (мы обсуждаем здесь только алгебру) делится на две части: *базисная элементарная алгебра* и собственно *конкурсная алгебра*. **Базисная алгебра**: *алгебраические*[2] *формулы и алгебраические преобразования, простейшие* (решаемые по стандартным формулам) *и стандартные* (сводящиеся к простейшим) *уравнения и неравенства* (рациональные и иррациональные алгебраические, тригонометрические, показательные, логарифмические, «смешанные»), — **целиком входит в основной и профильный курсы**. А вот **конкурсная элементарная алгебра**, должна быть выделена в **отдельный предмет** — специальный курс «***Методы решения алгебраических задач***» или совсем коротко «***Элементарная алгебра***», частичную реализацию которого в рамках элективных курсов для профильных классов мы и назвали «***Алгеброй плюс***».

Это выделение имеет целью «*погрузить*» учащихся (по предположению, *уже умеющих учиться, целенаправленно работать*!) в «специфику» конкурсных задач по алгебре. И это не репетиторский тренинг, основанный на рецептах, а *ознакомление со всем спектром методов эквивалентных преобразований алгебраических задач* и рядом других методов. При этом в полной мере используются и известные (по программе!) *методы математического анализа* (простейший пример: задача типа «При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение?» — это задача отыскания множества значений числовой функции, чаще всего просто решаемая с помощью производной).

[1] Вернемся к нашим баранам (франц.).

[2] В широком смысле — т. е. и тригонометрические, и логарифмические, etc.

Конечно, по крайней мере месяц «*конкурсной алгебры*» стоит затратить на подготовку к *устным* экзаменам — этого времени достаточно для повторения самой популярной тематики (целые числа и делимость, иррациональные числа и т. д.). Частично эта тематика затронута и в элективном курсе **А+**.

Приведем примерную программу полного курса «***Методы решения алгебраических задач***» — без отделения «базисной» алгебры от «конкурсной».

1. Методы и приемы решения рациональных алгебраических задач

Понятие алгебраической задачи (уравнения, неравенства, системы), решения, равносильности. Равносильные и неравносильные преобразования. Системы и совокупности (объединения) задач.

Алгебра полиномов. Деление с остатком. Теорема Безу. Число корней полинома. Теорема о рациональных корнях целочисленных полиномов. Иррациональность алгебраических чисел.

Рациональные алгебраические уравнения. Основные методы решения (замена, разложение).

Системы рациональных алгебраических уравнений. Число решений.

Системы линейных уравнений. Графический анализ. Метод исключения переменных (Гаусса). Линейные системы с параметрами.

Числовые неравенства и их свойства. Рациональные алгебраические неравенства (с переменной). Основные методы решения (равносильные переходы; метод интервалов). Доказательство неравенств (методы разложения и индукции).

2. Иррациональные алгебраические задачи

Уравнения с радикалами. Область допустимых значений и область равносильности преобразования. Основные методы решения (равносильные переходы — возведение в степень; замена — сведение к системам).

Неравенства с радикалами. Методы равносильных переходов, замены, интервалов.

3. Алгебраические задачи с параметрами

Понятие уравнения (неравенства, системы) с параметрами. Аналитическое исследование задач с параметрами.

Исследование задачи на плоскости «переменная — параметр» (метод горизонтальных сечений).

Метод сечений (семейств графиков). Применение производной к отысканию касаний.

Графическое исследование квадратичных задач с параметрами. Тригонометрические задачи с параметрами.

4. Смешанные задачи

Простейшие тригонометрические уравнения. Основные методы решения тригонометрических уравнений (замена, разложение, координатный метод).

Тригонометрические неравенства. Системы тригонометрических уравнений (основные приемы и методы решения).

Показательные и логарифмические уравнения. Логарифмирование, потенцирование, замена. Уравнения смешанного типа.

Показательные и логарифмические неравенства. Основные приемы и методы решения.

Тригонометрические, показательные и логарифмические функции в задачах с параметрами. Методы замены, координат, сечений.

Смешанные задачи с логическими условиями (ограничения на корни, число корней и проч.).

Производная в задачах с параметрами.

В следующем разделе 2 (в подразделах 2.1–2) та часть этой программы, которая включена в элективный курс **A**+, дается в более развернутом виде (заметим, что представляемый элективный курс охватывает темы 1–2 и затрагивает тему 3 из приведенной выше общей программы).

Раздел 2. КУРС «АЛГЕБРА ПЛЮС»

2.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА. ЗНАНИЯ, УМЕНИЯ, КОМПЕТЕНЦИИ

Цели и задачи изучения элективного курса «Алгебра плюс». Основной утилитарной целью изучения курса является следующая:

1. Систематизация и углубление знаний, закрепление и упрочение умений, необходимых для продолжения образования в вузах с повышенными требованиями к математическому образованию выпускников средней школы.

В то же время курс **A+** направлен на достижение таких целей:

2. Получение общего представления об элементарной алгебре и применяемых в ней методах как о составляющей всей математики как науки;

3. Развитие логической и методологической (в узком смысле) культуры, составляющей существенный компонент культуры мышления, рассматриваемый в рамках общей культуры;

4. Овладение общими приемами организации действий: планированием, осуществлением плана, анализом и выражением результатов действий;

5. Получение представления об универсальном характере математических методов, о тесной взаимосвязи элементарной алгебры с высшей математикой: арифметикой, алгеброй, математическим анализом; о единстве математики в целом;

6. Развитие внутренней мотивации и интрапсихического фактора поисковой активности в предметной деятельности, формирование устойчивого и осознанного интереса к ней.

При изучении курса **A+** перед учащимися ставятся следующие **конкретные задачи**:

✓получение знаний об основных логических и содержательных типах алгебраических задач: уравнений, неравенств, систем, совокупностей с рациональными, иррациональными функциями/выражениями; овладение навыками соответствующих алгебраических преобразований выражений и логических преобразований алгебраических задач;

✓овладение логическими, аналитическими, графическими методами решения алгебраических задач с изучаемыми классами выражений и функций;

✓освоение методов решения и исследования вычислительных и логических задач с параметрами;

✓получение конкретного представления о взаимосвязях высшей математики (арифметики, алгебры, математического анализа) с элементарной алгеброй на основе использования методов высшей математики при исследовании и решении алгебраических задач.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
(планируемые результаты обучения)

Предметные знания

Алгебраические задачи: уравнения, неравенства с переменными, системы, совокупности. Множества решений. Следование и равносильность задач.

Общее понятие задачи с параметрами. Суждения существования и всеобщности, кванторы. Логические задачи с параметрами. Координатная интерпретация задач с параметрами.

Многочлены и действия над ними. Деление с остатком, алгоритмы деления. Теорема Безу. Разложимые многочлены. Кратные корни. Число корней многочлена. Система и теорема Виета.

Элементы перечислительной комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения, перестановки с повторениями. Формула Ньютона для степени бинома. Треугольник Паскаля.

Многочлены низших степеней (от второй до четвертой). Отыскание корней и разложений. Теоремы Виета для квадратичных и кубических многочленов (уравнений). Формула Кардано.

Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства. Методы замены и разложения. Метод интервалов. Метод эквивалентных переходов. Метод сведения к системам. Метод оценок. Использование монотонности. Схемы решения задач с модулями. Неравенства с двумя переменными — координатная интерпретация. Метод областей.

Уравнения и системы с несколькими переменными. Основные методы решения рациональных алгебраических систем с двумя переменными: подстановка, исключение переменных, замена, разложение, использование симметричности и ограниченности, оценок и монотонности. Системы с тремя переменными — основные методы.

Алгебраические задачи с параметрами. Основные методы решения и исследования: аналитический и координатный (метод «Oxa»).

Предметные умения, которыми должны овладеть учащиеся по изучении данного курса:

— умение проводить логически грамотные преобразования выражений и эквивалентные преобразования алгебраических задач (уравнений, неравенств, систем, совокупностей);

— умение использовать основные методы при решении алгебраических задач с различными классами функций (рациональными и иррациональными алгебраическими), в том числе: методы замены, разложения, подстановки, эквивалентных преобразований, использования симметрии, однородности, оценок, монотонности;

— умение понимать и правильно интерпретировать задачи с параметрами, логические и кванторные задачи; умение применять изученные методы исследования и решения задач с параметрами: аналитический и координатный.

Общеинтеллектуальные умения:

— умение анализировать различные задачи и ситуации, выделять главное, достоверное в той или иной информации;

— владение логическим, доказательным стилем мышления, умение логически обосновывать свои суждения;

— умение конструктивно подходить к предлагаемым задачам;

— умение планировать и проектировать свою деятельность, проверять и оценивать ее результаты.

Общекультурные компетенции:

— понимание элементарной математики как неотъемлемой части математики, методы которой базируются на многих разделах математики высшей;

— понимание роли элементарной математики в развитии математики, роли математиков в развитии современной элементарной математики;

— восприятие математики как развивающейся фундаментальной науки, являющейся неотъемлемой составляющей науки, цивилизации, общечеловеческой культуры во взаимосвязи и взаимодействии с другими областями мировой культуры.

2.2. ПРОГРАММА КУРСА

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

В скобках после наименования темы указано ориентировочное минимальное время на ее изучение, исходя из трех часов в неделю; общее число часов 48 (16 недель), резерв — 22 ч.

Тема 1. Логика алгебраических задач (2 недели)

Элементарные алгебраические задачи как предложения с переменными.

Множество решений задачи. Следование и равносильность (эквивалентность) задач.

Уравнения с переменными. Числовые неравенства и неравенства с переменной. Свойства числовых неравенств.

Сложные (составные) алгебраические задачи. Конъюнкция и дизъюнкция предложений. Системы и совокупности задач.

Алгебраические задачи с параметрами.

Логические задачи с параметрами. Задачи на следование и равносильность.

Интерпретация задач с параметрами на координатной плоскости.

Тема 2. Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения (4 недели)

Представление о целых рациональных алгебраических выражениях. Многочлены над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ и над кольцом $\mathbb{Z}$. Степень многочлена. Кольца многочленов.

Делимость и деление многочленов с остатком. Алгоритмы деления с остатком.

Теорема Безу. Корни многочленов. Следствия из теоремы Безу: теоремы о делимости на двучлен и о числе корней многочленов. Кратные корни.

Полностью разложимые многочлены и система Виета. Общая теорема Виета.

Элементы перечислительной комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения, перестановки с повторениями. Формула Ньютона для степени бинома. Треугольник Паскаля.

Квадратный трехчлен: линейная замена, график, корни, разложение, теорема Виета.

Квадратичные неравенства: метод интервалов и схема знаков квадратного трехчлена.

Кубические многочлены. Теорема о существовании корня у полинома нечетной степени. Угадывание корней и разложение.

Куб суммы/разности. Линейная замена и укороченное кубическое уравнение. Формула Кардано.

Графический анализ кубического уравнения $x^3 + Ax = B$. Неприводимый случай (три корня) и необходимость комплексных чисел.

Уравнения степени 4. Биквадратные уравнения. Представление о методе замены.

Линейная замена, основанная на симметрии.

Угадывание корней. Разложение. Метод неопределенных коэффициентов. Схема разложения Феррари.

Полиномиальные уравнения высших степеней. Понижение степени заменой и разложением. Теоремы о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами.

Приемы установления иррациональности и рациональности чисел.

Тема 3. Рациональные алгебраические уравнения и неравенства (2 недели)

Представление о рациональных алгебраических выражениях.

Симметрические, кососимметрические и возвратные многочлены и уравнения.

Дробно-рациональные алгебраические уравнения. Общая схема решения.

Метод замены при решении дробно-рациональных уравнений.

Дробно-рациональные алгебраические неравенства. Общая схема решения методом сведения к совокупностям систем.

Метод интервалов решения дробно-рациональных алгебраических неравенств.

Метод оценки. Использование монотонности. Метод замены при решении неравенств.

Неравенства с двумя переменными. Множества решений на координатной плоскости. Стандартные неравенства. Метод областей.

Тема 4. Рациональные алгебраические системы (5 недель)

Уравнения с несколькими переменными. Рациональные уравнения с двумя переменными. Однородные уравнения с двумя переменными.

Рациональные алгебраические системы. Метод подстановки. Метод исключения переменной. Равносильные линейные преобразования систем.

Однородные системы уравнений с двумя переменными.

Замена переменных в системах уравнений.

Симметрические выражения от двух переменных. Теорема Варинга–Гаусса о представлении симметрических многочленов через элементарные. Рекуррентное представление сумм степеней через элементарные симметрические многочлены (от двух переменных).

Системы Виета и симметрические системы с двумя переменными.

Метод разложения при решении систем уравнений.

Методы оценок и итераций при решении систем уравнений.

Оценка значений переменных.

Сведение уравнений к системам.

Системы с тремя переменными. Основные методы.

Системы Виета с тремя переменными.

Тема 5. Иррациональные алгебраические задачи (3 недели)

Представление об иррациональных алгебраических функциях. Понятия арифметических и алгебраических корней. Иррациональные алгебраические выражения и уравнения.

Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной. Замена с ограничениями.

Неэквивалентные преобразования. Сущность проверки.

Метод эквивалентных преобразований уравнений с квадратными радикалами.

Сведение иррациональных и рациональных уравнений к системам.

Освобождение от кубических радикалов.

Метод оценки. Использование монотонности. Использование однородности.

Иррациональные алгебраические неравенства. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений.

Эквивалентные преобразования неравенств. Стандартные схемы освобождения от радикалов в неравенствах (сведение к системам и совокупностям систем).

«Дробно-иррациональные» неравенства. Сведение к совокупностям систем.

Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Определение промежутков знакопостоянства непрерывных функций. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств.

Замена при решении иррациональных неравенств.

Использование монотонности и оценок при решении неравенств.

Уравнения с модулями. Раскрытие модулей — стандартные схемы. Метод интервалов при раскрытии модулей.

Неравенства с модулями. Простейшие неравенства. Схемы освобождения от модулей в неравенствах.

Эквивалентные замены разностей модулей в разложенных и дробных неравенствах («правило знаков»).

Иррациональные алгебраические системы. Основные приемы.

Смешанные системы с двумя переменными.

2.3. ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Основная дидактическая единица курса — параграф, рассчитанный, на изучение в течение трех уроков. Предполагается, что эти уроки проводятся на одной неделе: сначала два спаренных урока, а потом единичный урок, который большей частью ориентирован на разбор и решение задач (разбор примеров из учебного пособия должен входить в теоретико-практическую часть занятия, как правило, проводимую на парном уроке). Так что представление о рекомендуемом тематическом планировании дает само оглавление учебного пособия. Приведем его и здесь, по темам. В правом столбце указано число недель, запланированных на тему, а в скобках — число часов (уроков).

Тема 1. Логика алгебраических задач	**2 н** (6 ч)
Тема 2. Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения	**4 н** (12 ч)
Тема 3. Рациональные алгебраические уравнения и неравенства	**2 н** (6 ч)
Тема 4. Рациональные алгебраические системы	**5 н** (15 ч)
Тема 5. Иррациональные алгебраические задачи	**3 н** (9 ч)
Р Е З Е Р В	**(22 ч)**

2.4. ОБЩИЕ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

2.4.1. Методы преподавания и формы организации учебных занятий

Предполагаемая форма проведения занятий по элементарной математике — лекционно/семинарская. Бóльшую часть материала курса можно преподнести в проблемном стиле, предлагая учащимся обдумать, каким методом решить ту или иную задачу. Отчасти такой проблемный подход реализован и в учебном пособии. Учитывая большую важность данного

элективного курса для выбравших его учащихся, необходимо очень четко фиксировать, в т.ч. и на доске, рассматриваемые в каждый конкретный момент методы решения задач. В конечном счете, именно знание методов помогает ориентироваться в задачах домашнего задания, контрольной работы или экзамена. И школьники должны иметь возможность вести четкий же конспект изучаемого в классе — с тем, чтобы на его основе составить короткую, удобную и красивую шпаргалку, не на клочке бумаги, а на красивом же листе! Напомним: шпаргалки пишутся (именно пишутся, а не покупаются!) не для использования их на экзаменах, зачетах или контрольных, а для подготовки к возможным испытаниям. При решении же домашних задач или на тренировочных контрольных использование своей шпаргалки позволяет прочнее усвоить формулы и методы решения алгебраических задач.

Лучше всего, если недельные занятия проводятся не на отделенных по времени уроках, а на парах уроков (лекция/семинар) плюс отдельный урок (самостоятельное решение и разбор задач). Тогда первый урок целесообразно отвести на обсуждение с учащимися нового материала, а большую часть второго — на решение задач (можно назвать их и упражнениями, но большей частью это действительно задачи, идущие чуть вперед по сравнению с разобранным материалом) на закрепление. Такие задачи приведены в учебном пособии. Частично учебный материал, изложенный в учебном пособии, может быть предложен учащимся для самостоятельного изучения — для «предпрочтения» перед занятием (это относится как к легкому материалу, к повторению, так и напротив, к более сложному — для пропедевтики его изучения на занятии) или «послечтения».

Возможна и иная планировка, и иная организация занятий. Важно при этом учитывать, что курс такого рода нужен для тех учащихся, которые уже сориентировались на продолжение образования в вузе с повышенными требованиями к довузовской математической подготовке и с высоким уровнем преподавания математических курсов в самом вузе.

2.4.2. Оценка уровня достижений учащихся

Исходя из того, что данный элективный курс в практическом отношении направлен на подготовку к письменному конкурсному экзамену, форму оценки уровня достижений учащихся целесообразно приблизить к практике конкурсных экзаменов. В «Пособии для учителя» к курсу дан пример контрольной работы соответствующего типа и как бы образцы оформления решений.

Существенная особенность подготовки к конкурсным экзаменам — выработка готовности к разного рода неожиданным по формулировке или по содержанию заданиям. Так же должны быть составлены и контрольные работы. Важно, что проведение таких работ не должно служить только проверке уровня достижений: рекомендуемые работы должны быть неотъемлемой частью процесса обучения, поэтому большое значе-

ние имеет разбор и комментирование решений проводимых контрольных (с анализом ошибок, оригинальных идей и т. п.). По контрольным работам предлагается критерий их оценки, исходя из 10 баллов, подобно практике письменных экзаменов, например, в МГУ. Разумеется, этот критерий можно скорректировать в соответствии с оценкой уровня подготовленности учащихся (или даже, как то принято в образовательной системе США, в соответствии с результатами выполнения такой работы).

В принципе полезно проводить и достаточно простые проверочные работы на знание методов, но и здесь важно, чтобы они были не оценивающими, а обучающими. Оценки за них могут быть условными — например, просто по числу верно решенных задач.

В приводимых в учебном пособии материалах не предусмотрена проверка знания учащимися теоретического материала, ибо в данном курсе «теория» — это совсем не главное и, по сути, не столь существенное. Главное — научить(ся) решать задачи, освоить методы решения, и важен результат итоговый, по окончании всего курса или полугодия (и самое важное — успешность сдачи письменных экзаменов).

2.4.3. Дополнительные обучающие материалы

Как в целях обучения, так и для контроля/самоконтроля можно рекомендовать использовать компьютерный курс «1С: Репетитор. Математика (часть 1)» — интерактивный мультимедийный учебный комплекс для самостоятельного образования и работы под руководством учителя (2002 г.). На этом компакт-диске можно найти обучающие уроки, частично соответствующие темам 2, 3, 5 данной программы, а также соответствующие домашние задания, контрольные работы и большой банк задач такой тематики.

2.5. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ПО КУРСУ «А+»

Вместе с характеристикой учебного пособия мы приведем и «автохарактеристику» данного методического пособия, с которой и начнем. Мы сочли необходимым прежде всего разъяснить авторскую позицию относительно проблемы подготовки школьников к продолжению образование в рамках углубленного или профильного обучения математике в старших классах средней школы. Этот, по сути, комментарий к элективному курсу «Алгебра плюс», дан в «Предисловии» и в разделе 1 методического пособия. В разделе 2 дан общий методологический и методический комментарий к программе курса и тематическое планирование, а в читаемом вами подразделе 2.5 — и характеристика или тот же общий комментарий к учебному (и методическому!) пособию[1]. Наконец, в

[1] «*У попа была собака...*».

разделе 3 дан конкретный преимущественно методический и отчасти методологический комментарий к темам (главам) и параграфам. К этому разделу дано «Дидактическое приложение», в котором приведен пример тематической контрольной работы вместе с решениями, которые, вдобавок к примерам из текста учебного пособия, даны как ориентировочный образец оформления решений задач. Добавим для учителя ради последующего донесения до учеников: в начале решения должно быть написано само слово «*Решение*» (или «*Доказательство*», если решается задача на доказательство), а в конце решения — слово «*Ответ*» (и сам ответ в рамочке! Доказательства можно заканчивать сакраментальной фразой «*Что и требовалось доказать*»).

В «Приложении 1», как и раздел 1, имеющем концептуальный характер, приведена авторская концепция углубленного математического образования, начиная с целей такого образования и заканчивая принципами отбора содержания. Именно этими положениями мы руководствовались при отборе содержания и выборе методики, на которую ориентировано учебное пособие. Это приложение, на наш взгляд, поможет лучше понять методологические и методические идеи, лежащие в основе рассматриваемого курса «Алгебра плюс» и учебного пособия к нему.

Что касается учебного пособия, оно имеет две существенных особенности. *Первая*: каждый его параграф является самостоятельной дидактической единицей, рассчитанной на изучение в течение одной недели. Самому автору хватило бы, наверное, всего двух часов в неделю, но на всякий случай мы запланировали и привели тематическое планирование из расчета *трех* часов (уроков) в неделю. *Вторая особенность* в том, что учебное пособие было задумано и написано так, чтобы оно могло бы использоваться и как *пособие для самообразования*. С этим связано обилие разбираемых в основном тексте учебного пособия примеров, и степень подробности их обсуждения. Это, между тем, позволяет рассматривать учебное пособие как и пособие *учебно-методическое*.

Конечно, учебное пособие «кровными узами», «генетически» связано с учебниками по алгебре основной школы и по алгебре и началам анализа средней школы — в тех вопросах, которые рассматриваются и здесь, и там. Вместе с тем, учебное пособие является и автономной учебной книгой: все необходимое для полного понимания, начиная со свойств числовых неравенств и формул для корней квадратных уравнений. Еще с одной стороны, «Алгебра плюс» первоначально имела подзаголовок «Элементарная алгебра с точки зрения высшей математики». Здесь иной раз не на что опереться в основном курсе, особенно по части, относящейся к алгебре. Если, скажем, в основных курсах предусмотрено знакомство с производной, то факты, касающиеся общей теории многочленов или симметрических выражений, в них отсутствуют — но и здесь мы стараемся выдержать автономность, излагая нужный материал, в принципе относящийся к математике высшей, на предельно доступном (и вместе с тем, строгом!) уровне.

Приложение 1. ЦЕЛИ И СОДЕРЖАНИЕ УГЛУБЛЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Как было обещано ранее, в данном разделе мы приводим более подробное изложение и обоснование основных целей углубленного математического образования в рамках средней школы и на их основе формулируем основные принципы отбора содержания образования.

Этот раздел представляет собой часть авторской концепции углубленного изучения математики. Ради соблюдения автономности раздела мы повторяем ряд положений, уже изложенных выше. Для удобства все главы раздела имеют общий «Список литературы», помещенный в конце раздела. При цитировании ссылки даются по этому списку с указанием страниц.

П1.1. ЗАЧЕМ ВООБЩЕ УЧАТСЯ?

Не спится. Дай зажгу свечу. К чему читать?
Ведь снова не пойму я ни одной страницы.

Афанасий Фет

В настоящее время, когда существенно изменились общие внешние и внутренние обстоятельства, которыми обусловливается постановка математического образования в средних школах, важно заново проанализировать наиболее важные аспекты углубленного математического образования. *Обстоятельства*, которые здесь имеются в виду, заключаются, во-первых, в более-менее окончательном *переходе школ на модернизированное содержание математического образования*, в старших классах начавшееся еще в 1975–77 гг. Во-вторых, систему образования в последнее десятилетие отличает *процесс демократизации школьного образования* — появление новых моделей образования, типов школ (гимназий, лицеев, etc.) и т. д.; резко возросло внимание к дифференциации, индивидуализации и специализации обучения; вместе с тем значительно увеличилось число классов с углубленным изучением математики и «смешанно-математического» профиля, причем этот процесс протекает спонтанно и практически не регулируемо — и это все в условиях фактического отсутствия достаточного методического обеспечения. Наконец, третье обстоятельство, которое нельзя не учитывать — это бурно протекающий процесс *компьютеризации школ*.

Какие *аспекты углубленного математического образования* представляются наиболее актуальными в связи с перечисленными обстоятельствами? — Прежде всего, это общая *стратегия, стратегические цели* углубленного математического образования. В недавние времена, рассматривая «*Проблемы математической школы*[1]», ограничивались пре-

[1] Это название серии сборников учебно-методических материалов, выходившей в 1965–1977 гг., очень полезных, но отличающихся своей практически сугубо утилитарной направленностью.

имущественно прагматическими вопросами специального углубленного математического образования. Но то были времена существования еще сравнительно небольшой сети школ и несколько более распространенной, но заведомо *не такой тотальной*, как ныне, системы классов, в которых давалось углубленное математическое образование с утилитарной направленностью на продолжение образования — в вузах физико-математического или естественно-научного профиля. В широкой и общей постановке вопрос о *целях углубленного математического образования* не ставился. В нынешней ситуации такая постановка необходима, ибо иначе непонятно, *зачем вообще* мы столь широко организуем классы с углубленным изучением математики, нужны ли они, *кого* мы «готовим» в этих классах.

Самый общий ответ на вопрос о стратегических целях углубленного математического образования связан с пониманием роли школьного образования вообще. Рассматривая общие проблемы образования и воспитания, крупнейший психолог XX века Карл Густав Юнг отмечал: «*Школа есть не что иное, как средство целесообразного поддержания процесса образования сознания. ... Максимально возможная степень сознательности*» — это культура [32, с. 55–56]. И более приземленно и общо: «*Цель школы не сводится исключительно к тому, чтобы до отказа набить головы знаниями, а состоит скорее в том, чтобы воспитать детей настоящими людьми*» [32, с. 61]. Крупнейший философ и математик первой половины XX века Альфред Норт Уайтхед, касаясь образования как одной из предпосылок социального прогресса, писал: «*Именно равномерное развитие индивидуальности должно быть целью образования*» [27, с. 260]. Уже касательно математики другой знаменитый математик и философ Анри Пуанкаре, который тоже был не чужд проблемам образования, писал: «*Главная цель обучения математике — это развить известные способности ума...*» [24, с. 464]. Он же подчеркивал связи математики и эстетики, науки вообще и морали[2]. Почти современный математик и педагог Дьердь Пойа (1887–1985) тоже говорил о «*научении думать*» как главной цели обучения [23, с. 287]. И вот эти высокие цели нужно поставить во главу угла, положить в основу *стратегии углубленного математического образования*. Однако, во избежание «*бесплодных словоизлияний*» (см. [23, с. 326]), необходимо четко определить, какой конкретный смысл следует в настоящее время вкладывать в каждый отдельный аспект, скажем так, *формирования сознания и воспитания личности* при углубленном математическом образовании. Самое важное, *основное* заключается в определении и фиксации *ведущей*

[2]В нашу задачу отнюдь не входит рассмотрение философских, не раз комментировавшихся и критиковавшихся взглядов Юнга, Уайтхеда, Пуанкаре — и, далее, Г. Вейля и Вигнера. Нас интересуют воззрения этих крупнейших и почти современных нам ученых на *общие проблемы образования*, в частности, математического — а таковые воззрения своей основой имеют реальный, подлинный опыт.

роли предмета математики (и адекватного ее преподавания) в формировании сознания, воспитании личности — во взаимодействии со всей системой преподавания в соответствующей группе (школе, классе). Уже после этого можно обратиться к более утилитарным, прагматическим целям.

Таким образом, в данном разделе мы систематизируем стратегические и «тактические» цели, делая акцент на определение их приоритетов.

Второй аспект целесообразной постановки углубленного математического образования — это его содержание. Представляется, что в данное время содержание углубленного математического образования должно быть очерчено лишь *принципиально, концептуально*. Одни и те же цели могут быть достигнуты разными способами и разными методами: как писал К. Г. Юнг, «*Если между ребенком и учителем установились хорошие личные отношения, то само по себе почти не имеет значения, насколько дидактические методы учителя соответствуют или не соответствуют новейшим требованиям. Ибо не в дидактическом методе кроется секрет успеха обучения*» [32, с. 61]. В то же время нельзя не учесть значительно возросшую роль математики в современном мире, эволюцию взглядов на «*архитектуру математики*» [5, с. 245-259], переоценку роли различных отраслей математики. Поэтому в заключающей раздел главе «Содержание углубленного математического образования» мы не просто формулируем основные принципы определения содержания, но и, по мере возможностей, анализируем некоторые возникающие здесь проблемы и подходы к их решению.

П1.2. КТО УЧИТСЯ?

(Углубленное математическое образование — общие предпосылки)

...И бывает, что иной молчит — и он благоразумен.

Иисус Сирахов

Чтобы более определенно очертить цели углубленного математического образования, начнем с обсуждения вопроса о том, кому, какому контингенту детей было бы необходимо такое образование.

Начнем с двух не совсем общепринятых тезисов. **Первый**: в наиболее неблагоприятных условиях в школе, особенно в средних классах, находятся способные учащиеся, а отнюдь не слабые, плохоуспевающие. Именно способным часто не хватает учительского внимания и поддержки, а также и среды общения, адекватной их интересам и возможностям. Эта ситуация отнюдь не новая, она характерна для школьного образования уже с давних пор. К. Г. Юнг в 1943 г. в работе «***Феномен одаренности***» писал по этому поводу следующее: «*...Установка... покоилась на благородном принципе: помогать слабым и искоренять зло. К сожалению, однако, с такими правилами часто случается, что они возводятся в степень бездушных принципов, которые уже не стоят никакого дальнейшего раздумья. Отсюда возникает прискорбная карикатура добра: хотя помогают слабым и борются со злом, но одновременно возникает опасность того, что талант останется без внимания, как будто само по себе из-ряда-вон-выхождение уже что-то будто сомнительное и непристойное*» [32, с. 153–154], — и далее: «*Одаренный ребенок на самом деле задает школе трудную задачу, которую нельзя оставить без внимания, несмотря на благой принцип — помогать слабоодаренным. ...Нельзя, чтобы из-за одного лишь желания быть милосердными мы проглядели одаренных детей, столь нам необходимых*» [32, с. 154].

Вместо того, чтобы говорить об *одаренности*, трудно диагностируемой и достаточно неоднозначно понимаемой, мы будем вести речь о *способных* детях — конкретно, о детях, проявивших некоторые *математические способности* и *определенный интерес к математике*. Не вдаваясь в плохо исследованный вопрос о природе математических способностей, отметим, что такие дети обычно довольно рано проявляют себя (у достаточно умного и квалифицированного учителя), по контрасту с детьми, обнаруживающими, по Юнгу, «*недостаток математической способности*» (в 1925 г. Юнг писал: «*...Наиболее часто встречается у детей неспособность понимать математику, которая не выражается в наглядных числах. ... Математика отвечает определенному духовному складу, которым обладают далеко не все люди, причем это качество нельзя сформировать искусственно. Те, кто его лишен, могут только „вызубрить“ математику, не понимая смысла*» — [32, с. 169]). Последним-то и достается преимущественное внимание учителя математики.

При таких условиях к старшим классам способные превращаются в обыкновенных «серых», а то и вовсе неблагополучных учеников. Вывод: если мы хотим, с одной стороны, поддерживать на высоте интеллектуальный потенциал общества, а с другой — дать возможность каждому ребенку если не оптимально, то хоть как-нибудь развить свои способности, то нужно приложить специальные, особые усилия. Спрашивается, какие?

В школе ребенка образовывают, воспитывают среда и учитель. И возможный выход — собирать способных учеников в классы (это — среда образования), где учителя, энтузиасты своего дела, помогут создать особую атмосферу — культа знаний и культуры, взаимопомощи и взаимообучения, а по максимуму — и творчества, творческого общения.

Тезис второй. Обычно считается, что школьники склонны преувеличивать свои способности и возможности; учителя же, по мнению школьников, часто недооценивают их. Второе нередко бывает справедливо, но насчет первого можно усомниться. Опыт показывает, что часто (чаще!) школьники недооценивают себя, свои способности, зачастую даже не подозревают о них. Конечно, школа предоставляет учащимся известный набор «форм работы», направленных на решение этой проблемы: кружки, факультативы, олимпиады. Но уже «оглупленные» предыдущим своим опытом (см. предыдущий тезис) и недооценивая себя, многие в принципе способные школьники проходят мимо всего этого. Тут надо было бы найти достаточно ненавязчивые, необязательные, безотносительные к собственно учебному процессу формы работы со школьниками, открытые для всех и помогающие узнать свои способности, раскрыть свои возможности. Какие? — Об этом говорилось в разделе 1.3.

Таким образом, мы рассматриваем *углубленное математическое образование в рамках определенной группы* школьников, проявивших или проявляющих интерес к математике, некоторые к ней способности, и именно этот контингент учащихся подразумевается при формулировке основных положений нашей концепции.

П1.3. МАТЕМАТИКА, СОЗНАНИЕ, ВОСПИТАНИЕ

(Математика, формирование сознания и воспитание личности)

...Математика играет весьма существенную роль в формировании нашего духовного облика.

Герман Вейль

Математика, как школьный предмет, может и должна играть существенную роль в воспитании личности, в становлении ее характера. К сожалению, это часто упускается из виду или просто игнорируется. В 1913 г. в мемуаре «***Моралъ и наука***» Пуанкаре писал: «*Наука, широко понимаемая, преподаваемая учителями, которые ее понимают и любят, может играть очень полезную и важную роль в моральном воспитании*»[24, с. 661]. «*Тот, ... кто увидел хотя бы издали роскошную гармонию законов природы, будет более расположен пренебрегать своими маленькими эгоистическими интересами, чем любой другой.*» Идеал, бескорыстие, любовь к истине, искренность... «*Наука, как сказал Аристотель, имеет предметом общее; во всяком частном случае она будет искать общий закон и требовать все более и более широкого обобщения. ...Интеллектуальные привычки имеют свой моральный отголосок. ...Вы привыкнете мало обращать внимания на частность, на случайность... Так естественно склоняются к подчинению частных интересов интересам общим, и в этом снова есть моралъ*» [24, с. 658–659]. «*Наука ...является коллективным творчеством и не может быть ничем иным... Она дает нам чувство необходимой кооперации, солидарности наших трудов с трудами наших современников, наших предшественников и наших последователей... Чувство дисциплины ...делает ...способными на любой героизм и любое самопожертвование... Мы чувствуем, что работаем для человечества, и человечество от этого становится нам более дорогим*» [24, с. 659–660]. Тут же Пуанкаре указывает и на возможные аргументы против изложенной точки зрения: «*Всякая страсть исключительна... Любовь к истине, — без сомнения, великое дело, но ...доброта, сострадание, любовь к ближнему? ...Есть люди, которые говорят, что наука сушит сердца, что она... убивает поэзию — единственный источник всех общих чувств. Душа... вянет и становится неспособной к высоким порывам, умилению, энтузиазму*» [24, с. 660–661]. Но здесь уже все зависит от индивида — от личности воспитывающей и личности воспитываемой.

Качества, которые несомненно могут быть сформированы при соответствующей постановке обучения математике — *объективность, независимость мышления, самостоятельность, критический склад ума, интеллектуальная честность, целеустремленность и настойчивость, развитое внимание и способность сосредоточиться, точность и сжатость в выражении своих мыслей, чувство гармонии.* Разумеется, нелепо было бы полагать, что эти качества, вместе с теми, которые перечисле-

ны у Пуанкаре, можно сформировать какими-то *специальными* упражнениями. Нет, они воспитываются *постепенно*, в ходе целостного процесса обучения математике. Ясно, вместе с тем, что упомянутый выше «*недостаток математической способности*» вряд ли позволит использовать именно занятия математикой для воспитания этих качеств (что не означает невозможности их воспитания — дети редко бывают «всесторонне неодаренными», и иные школьные предметы или другие воспитательные средства вполне могут скомпенсировать данный «недостаток»).

Формирование сознания в процессе обучения математике идет, главным образом, через формирование культуры мышления, развитие способностей ума. Обычно в данном случае апеллируют к формированию логического мышления. Приведем точку зрения Юнга из той же работы («Феномен одаренности», 1943): «*...in puncto математических способностей, по крайней мере, прежде, господствовали очень неверные представления. Полагали, например, что способность к логическому и абстрактному мышлению воплощена, так сказать, в математике, а потому последняя является лучшей школой логического мышления. Однако математические способности, как и биологические ей родственные музыкальные, — это способности, не тождественные ни логике, ни интеллекту, но пользующиеся их услугами точно так же, как философия и наука вообще. Как можно быть музыкальным, не имея и следов интеллекта? С другой стороны, поразительные счетные способности могут встречаться даже у имбецилов. Невозможно вдолбить внутреннее понимание музыки — то же самое касается и понимания математики, потому что это — специфическая способность*[1]» [32, с. 156–157]. Спрашивается, как это понимать? — Ответ можно найти и у Пуанкаре, и у одного из крупнейших математиков середины XX века Германа Вейля[2]. Именно, в математике не меньшую, а может быть и большую роль играет не логика, а *интуиция*, понимаемая как важная «*способность ума*». «*Благодаря ей мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром...*» (Пуанкаре, [24, с. 464]). «*Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции. Хорошо уметь критиковать, еще лучше — уметь творить.*» Логика «*не говорит, какой путь ведет к цели. Для этого необходимо видеть цель издалека, и интуиция есть та способность, которая этому нас учит*[3]» [24, с. 464–465].

Таким образом, говоря о воспитании мыслительных способностей при обучении математике, необходимо помнить и понимать (и прививать это понимание ученикам), что наряду с логическим или формальным мыш-

[1] Еще раньше, в работе 1925 г., Юнг писал совсем резко: «*...Формирование логического мышления не имеет с математикой ничего общего*» [32, с. 169]!

[2] Г. Вейль также занимался философией науки.

[3] И Пуанкаре высказывается еще жестче, чем Юнг: «*Логика приводит часто к уродствам*» [24, с. 461].

лением, базирующемся на аксиомах, определениях и строгих доказательствах, математическое мышление включает в себя «*многое другое: обобщение рассмотренных случаев, применение индукции, использование аналогии, раскрытие или выделение математического содержания в какой-то конкретной ситуации. Учитель математики имеет много подходящих случаев познакомить своих учеников с этими чрезвычайно важными „неформальными“ стадиями мыслительного процесса...*» (Пойа, [23, с. 288]). Великий математик и философ Рене Декарт различал два «*пути познания*» — интуицию и дедукцию, причем у него дедукция должна была основываться на интуитивном понимании (см. [23, с. 318]). Д. Пойа приводит высказывание одного из крупнейших французских математиков XX в. Жака Адамара: «*Цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции, — и никакой другой цели у нее никогда не было*» [23, с. 319]). Так что взаимоотношения настоящей математики и логики отнюдь не сводятся к взаимозависимости — это следовало бы понимать учителю.

Сознание — это со-знание, мышление — это умение. «*Математика является меньше знанием, чем умением*» (Сервэ, [18, с. 24]). Умение есть способность использовать имеющиеся знания, и умение подразумевает: независимость мышления, оригинальность, изобретательность, творческие способности. Собственно математические умения — это главным образом, способность решать задачи, анализировать результаты, пользоваться математическим аппаратом. Немалую роль для развития интуиции играет умение «разумно угадывать», основываясь на осмысленном применении индукции и аналогии.

Итак, *важнейшими целями углубленного математического образования являются*: ***воспитание интеллектуальных и моральных черт характера, эстетического чувства; способствование формированию важнейших интеллектуальных умений и мышления, способностей ума; формированию сознания.***

П1.4. МАТЕМАТИКА И ДУХОВНАЯ КУЛЬТУРА

(Математика как часть духовной культуры)

Наука чистой математики в ее современных вариантах может быть представлена в качестве самого оригинального продукта человеческого духа. Другим претендентом на это звание является музыка.

Альфред Норт Уайтхед

Заметим, что еще в Древней Греции математика мыслилась как один из важнейших элементов культуры. Само название этой древнейшей из из наук, т. е. слово «математика», происходит от греческого $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ (**mathema**) — «наука», «учение», от глагола $\mu\alpha\theta\alpha\nu\omega$ — «учусь через размышление». В школе Пифагора знали четыре $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$, то есть четыре отрасли науки — учение о числах (арифметику), теорию музыки (гармонию), учение о фигурах и измерениях (геометрию) и, наконец, астрономию и астрологию; математика непосредственно входила в структуру культуры. Недаром слово «аксиома», $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$, перешедшее в математику от философов Древней Греции, означает «достоинство», «уважение», «авторитет», а «теорема», $\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ — «зрелище», «представление»! В те времена математика была настолько общезначимой, что, согласно легенде, одного из учеников Пифагора, рассказывавшего об иррациональности корня из 2, утопили в реке [2]. На роли, которую математика играла позже, вплоть до XIX века, в практике и в культуре подробно останавливается, например, Стройк в книге [26].

Но вот не так уж давно, по словам Г. Вейля, крупнейший математик XIX-XX вв. Феликс Клейн, вдохновитель реформы преподавания математики в Германии [7, с. 6], «*сетовал, что „в немецком обществе еще, видимо, не сформировалась единая культура, включающая точные науки как одну из обязательных компонент“*» [6, с. 9]. Однако в 1956 г. бельгийский математик и педагог Вилли Сервэ констатировал: «*Мы ... находимся сейчас ... в высокой математической конъюнктуре, никогда прежде не достигавшейся. Больше, чем когда-либо, математика является одновременно культурой в лоне культуры и техникой в сердце техники. Она представляет собой культурную ценность сама по себе, идеал формальной красоты, заложенной в произведениях искусства — в том, что в них содержится наиболее классического. Этот идеал выражается словами:* ***мера, порядок, отношение, пропорция****...*» [18, с. 23–24]. И уже в наши дни известный математик Е. С. Вентцель (она же — писательница И. Грекова) говорила о *стирании граней* между точными (т.е. применяющими математику) и гуманитарными (вербальными) науками [8, с. 43]. Хочется надеяться, что постепенно снова приходит действительное понимание того, что математика есть неотъемлемый компонент современной духовной культуры[1].

[1] Роли математики в культуре материальной посвящен следующий подраздел.

Рассмотрение математики как части общей духовной культуры по самой постановке вопроса наиболее общезначимо, — подобный подход был бы доступен, интересен и полезен всем школьникам, в том числе и тем из них, которые более склонны к гуманитарным предметам. Он предполагает исторический ракурс рассмотрения предмета математики и, безусловно, был бы весьма полезен и при углубленном изучении математики. Остановимся несколько подробнее на двух аспектах такого подхода.

Математики с самого ее зарождения играли виднейшую роль еще и как философы. Первым математиком и вообще первым ученым считается Фалес Милетский. Далее следует расцвет эллинской культуры и философии, в частности, пифагорейской школы (V в. до н. э.). С последней связан крупнейший кризис в развитии математики — открытие иррациональных чисел, — преодоленный окончательно только в конце XIX века. И в послеантичный период математика и философия были «*неразлучны*» [17] — достаточно упомянуть заложивших основы современной философии естествознания Леонардо да Винчи, Галилео Галилея [10], Рене Декарта [13] и Иоганна Кеплера [16], неортодоксальных религиозных философов Блеза Паскаля ([20]; знаменитый аргентинский писатель XX века Хорхе Луис Борхес посвятил теологическим воззрениям Паскаля примечательные эссе «*Паскаль*» [4] и «*Сфера Паскаля*» [3]) и Готфрида Вильгельма Лейбница [31]. Качества выдающихся математиков и философов совмещали в себе и ученые XX века. Крупнейшие из них — Анри Пуанкаре ([24]; он подвергся критике В. И. Ленина в книге «*Материализм и эмпириокритицизм*»), Бертран Рассел и Альфред Норт Уайтхед [27][1]. Примечательно, что с двумя последними математиками-философами связан второй крупнейший кризис математики — открытие парадоксов (то есть противоречивости) интуитивной теории множеств Георга Кантора (один из парадоксов носит название «парадокс Рассела»). Они же сыграли значительную роль и в преодолении этого кризиса, будучи в числе тех, кто заложил основы исключающей парадоксы аксиоматической теории множеств (см. у Бурбаки, [5]).

Теперь остановимся на *взаимосвязи* математики и искусства[2]. Зародившись в античную эпоху, эта связь не прерывалась никогда [21]. Идеи симметрии питали и продолжают питать творческое воображение не только архитекторов и художников [6] — например, нашего почти современника Мориса Эшера (1898–1972), — но и поэтов, и писателей, скажем, упоминавшегося уже Хорхе Луиса Борхеса [28]. Более того, в

[1] Мы выше уже неоднократно цитировали Пуанкаре и Уайтхеда, и к их педагогическим воззрениям еще возвратимся.

[2] Недаром ведь Пушкин от лица Моцарта писал: «*Поверил я алгеброй гармонию.*» Крупнейший композитор XX века И. Ф. Стравинский в своих мемуарно-критических работах неоднократно обращался к анализу глубоких «интеллектуально-психологических» связей между музыкой и математикой, между творческими процессами в этих областях и эстетикой их «продуктов».

замечательных графических работах профессора Московского университета А. Т. Фоменко нашли очень интересное отражение глубокие идеи самой современной математики, включая топологию [30]. С другой стороны, в 1980 году американский математик Бенуа Мандельброт открыл свое знаменитое и неисчерпаемо красивое «множество Мандельброта» на комплексной плоскости — можно сказать, математика *непосредственно* вторглась в эстетику [19]! Следует сказать и о вкладе собственно художников в математику — конечно, это Леонардо да Винчи, своим учением о перспективе заложивший, по сути, основы проективной геометрии, законченной уже математиками Дезаргом, Паскалем, Монжем. А автор знаменитой гравюры «*Меланхолия*» Альбрехт Дюрер был не менее знаменит своей переведенной на многие языки математической работой «*Наставление к измерению циркулем и линейкой*», содержавшей построение многих сложных кривых.

Итак, математика развивалась в неразрывной связи с духовной культурой. Это обстоятельство, несомненно, заслуживает того, чтобы быть положенным в основу *специального курса истории* математики. А чего же в этой связи можно достичь в курсе собственно математики?

В своей знаменитой книге «***Наука и метод***» (1908), в разделе «***Математическое творчество***» Анри Пуанкаре говорит «*о чувстве прекрасного в математике, о гармонии чисел и форм, о геометрическом изяществе. Всем истинным математикам знакомо настоящее эстетическое чувство. ... Какие же именно математические предметы мы называем прекрасными и изящными, какие именно предметы способны вызвать в нас своего рода эстетические эмоции? Это те, элементы которых расположены так гармонично, что ум без труда может охватить целое, проникая в то же время и в детали*» [24, с. 410]. Даже в совсем традиционных разделах математики — таких, как тригонометрия, — не говоря уже об «изысках», скажем, элементарной теории групп, есть масса поводов продемонстрировать учащимся красоту математики, заключающуюся, как и в поэзии, еще и в игре ассоциаций; как и в музыке, в разнообразии вариаций (взять хотя бы аналогию «*кольцо целых чисел*» — «*кольцо многочленов*»). Разумеется, чтобы эта красота и гармония была воспринята, нужна хотя бы минимальная «воспитанность» в области «математической эстетики», но это и есть забота учителя — одна из первых.

Итак, *одна из основных целей углубленного математического образования состоит* ***в воспитании у школьников подлинно эстетического восприятия математики, формирования представления об исторически взаимообусловленном единстве математики с другими составляющими духовной культуры.***

П1.5. МАТЕМАТИКА И ЦИВИЛИЗАЦИЯ

(Математика как составляющая цивилизации)

В случае, если цивилизация будет продолжать развиваться, в следующие две тысячи лет преобладающим нововведением человеческой мысли будет доминирование математического понимания.

Альфред Норт Уайтхед

Математика соединяет эпохи и цивилизации — века, тысячелетия, государства. И с развитием общечеловеческой цивилизации математика все более и более влияет на нее и становится, при всей сложности взаимосвязи, движимой не только духовными потребностями общества. Одним из достижений XVII века становится ясное понимание того, что математика является основой методологии и философии естествознания (Галилей, Декарт, Кеплер, Ньютон). «*Величественная книга природы ... написана ... на языке математики, и знаки ее — треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова*» (Галилей, [10, с. 41]). Таким образом, в XVII веке «*математика обеспечила основу для интеллектуального воображения, с помощью которого люди науки взялись за наблюдение природы*» (Уайтхед, [27, с. 88]).

С другой стороны, «*стремительное развитие математики в эпоху Возрождения было обусловлено не только „счетным уклоном“ купеческого класса, но и эффективным использованием и дальнейшим усовершенствованием машин*» (Стройк, [26, с. 127]). Начало этого «*обратного влияния*» было заложено еще в античности (Архимед), но только в XVII–XVIII вв. математика входит в непосредственные отношения с развивающимися производительными силами общества. Вот как характеризует дальнейшую «*интеллектуальную историю*» в своей книге «***Наука и современный мир***» (1925) А. Н. Уайтхед (глава «*Математика как элемент интеллектуальной истории*»): «*Как результат значения математики в XVII в. сознание людей XVIII в. оказалось математически окрашенным... В XIX в. общее влияние математики падает. Романтическое движение в литературе и идеалистическое направление в философии не были продуктами математического ума*» [27, с. 89]. «*В течение всего XIX в. влияние математики ограничивалось воздействием на динамику и физику, а при их посредстве — на химию и инженерное дело. Трудно переоценить ее косвенное воздействие с помощью этих наук на человеческую жизнь. Но прямого влияния на магистральное направление мышления данной эпохи математика не оказывала*» [27, с. 90]. Сегодня (1925 год) «*наступает, видимо, конец временного забвения, которое постигло математическое мышление во времена Руссо. Мы вступаем в эпоху перестройки, касающейся религии, науки и политического мышления. В такие эпохи, если удается избежать бессмыс-*

ленного колебания между крайностями, свойственно стремиться к последним глубинам истины. Видение глубин подвластно человеку, если он владеет философским мышлением, способным полностью охватить те предельные абстракции в их взаимосвязи, которые и составляют предмет математики» [27, с. 91].

Современный этап развития цивилизации характеризуется выходом математики на одно из ведущих мест в системе научных знаний и их приложений в практике — в производстве, управлении и в социально-экономической практике вообще. Эту одну из основных черт современной научно-технической революции принято называть ***математизацией знаний*** (см. [14, с. 55 и далее]). С методологической точки зрения математизация знаний просто «*адекватна внематематическим приложениям математики*» (Рыбников, [25, с. 33]) и, как указывалось выше, представляет из себя перманентный процесс, который, однако, во второй половине XX века претерпел резкий скачок, позволяющий говорить о том, что «*в наше время математизация знаний совершает своеобразный победный марш*» (см. Гнеденко, [11, с. 20]). В основе этого скачка лежит, в первую очередь, революция в вычислительной технике, приведшая к созданию современных компьютеров, привлекаемых к решению не только и не столько чисто математических задач, но к решению задач, которые возникают в других науках, в технике, в экономике, статистике и управлении, непосредственно в материальном производстве. Выше уже говорилось о том, что «*математика, будучи фундаментальной теоретической наукой, на многих важных этапах своего развития не только была направлена на решение практических задач, но и была движима потребностями практики*» [14, с. 56]. В настоящее время, в связи с огромными возможностями применения компьютеров, математические методы существенно расширили область своего применения, что, в свою очередь, привело к созданию новых математических теорий, отличающихся своим прикладным значением — таких, как линейное и динамическое программирование, теория оптимального управления, современная математическая статистика, теория массового обслуживания и т. д. С другой стороны, благодаря применению компьютеров существенно расширились возможности приложений таких давно ставших традиционными разделов математики, как математический анализ, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, линейная алгебра и др. В связи с разработанными методами приложений развились в самостоятельные прикладные теории многие разделы дискретной математики — такие, как комбинаторный анализ, теория автоматов, теория информации и кодирования. На стыке информатики, программирования и математики появился важный, например, для теоретической физики, теории чисел, алгебры и алгебраической геометрии раздел дискретной математики — компьютерная алгебра, и так далее, и так далее. (Стоит отдельно упомянуть связанное с разработкой проблем искусственного интеллекта

проникновение математического языка и математических методов в психологию познавательных процессов, разработку математических теорий обучения и приобретения знаний, математизацию лингвистики и семиотики. Впрочем, в предыдущей главе мы уже упоминали о «стирании граней» между естественными и гуманитарными науками.)

Разумеется, нельзя не учитывать в школьном математическом образовании такого важного аспекта современной цивилизации, как кратко проанализированное выше внедрение в нее математического языка, математических методов, математического мышления. Вместе с тем сколько-нибудь *содержательный*, а не только «декларативно-назывательный» учет этого аспекта возможен и плодотворен только в рамках углубленного математического образования. Целый ряд упомянутых актуальных прикладных математических теорий в той или иной мере мог бы войти составляющей углубленного математического образования — различные разделы дискретной математики, комбинаторного анализа (традиционно комбинаторика входила в полный курс гимназий и средних школ), компьютерной алгебры (ведь основателем компьютерной алгебры по праву может считаться Евклид — алгоритм Евклида входит в азы этой интереснейшей теории); прикладные разделы математического анализа, теории дифференциальных уравнений и т. д.

Тем самым мы приходим к тому, что *при углубленном математическом образовании должна быть адекватным, но* ***доступным*** *образом отражена* ***математизация знаний***; это достигается соответствующим определением *содержания* углубленного математического образования. Проблематика определения содержания обсуждается ниже, в последнем подразделе. Отметим также, что математизация знаний проявляет себя в приложениях, как правило, посредством *математического моделирования* — о его сущности и проблематике говорится в следующем подразделе, посвященной анализу роли математического образования в формировании научного мировоззрения учащихся.

П1.6. МАТЕМАТИКА И МИРОВОЗЗРЕНИЕ

(Математические модели и методология науки)

Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар...

Юджин Вигнер

Согласно энциклопедии[1], *мировоззрение* — это «*система взглядов на объективный мир и место человека в нем, на отношение человека к окружающей его действительности и самому себе, а также обусловленные этими взглядами основные жизненные позиции людей, их убеждения, идеалы, принципы познания и деятельности, ценностные ориентации*». Традиционно считается, что основную роль в формировании мировоззрения играют гуманитарные, социальные дисциплины — история, литература, философия (в школе — в той мере, в какой она отражается в школьных дисциплинах). Мы полагаем, что такая позиция страдает однобокостью. Для тех детей, которые не лишены способности воспринимать математику, а значит, и естественно-научные предметы (а таковых, в случае правильной постановки преподавания и воспитания, уж никак не меньше половины), не меньшую роль в формировании мировоззрения играет математика (и естественно-научные предметы) — в первую очередь, из-за своего исключительного места в культуре — места, по сути, *между* гуманитарными (вербальными) и точными (формально-логическими) науками. Не менее важна здесь и специфическая роль математики в формировании сознания, воспитании эстетического чувствования и морали, о чем шла речь выше.

Особо обратим внимание на *воспитание нравственности* при осуществлении углубленного обучения математике в специально сформированных группах способных школьников. Дело в том, что среди способных школьников есть и одаренные, талантливые, а воспитание в них моральной личности может представить определенные трудности. Как констатировал психолог К. Г. Юнг, «*Большей частью ... развитие одаренности оказывается несоразмерным степени зрелости личности в целом, и зачастую складывается впечатление, будто творческая личность выросла за счет гуманной. ... Существует немало одаренных людей, польза от которых сведена на нет или даже обращена в свою противоположность их человеческими недостатками. Одаренность вовсе не безусловная ценность, но она ею становится лишь в том случае, если остальная личность идет с ней в ногу настолько, что талант может быть применен с пользой*» [32, с. 158–159] и, далее: «*...У дарования есть тот моральный недостаток, что оно вызывает у своего обладателя чувство превосходства и вместе с тем определенную инфляцию,*

[1] БСЭ (3-е изд.), т. 16.

которую следовало бы компенсировать...» [32, с. 160]. И для формирования нравственной личности в данном случае как раз необходимо в полной мере использовать объект преимущественного интереса «одаренности» — в данном случае, предмет математики. Опять-таки, *как это делать*? — Все зависит от профессионализма учителя и, как неоднократно отмечает в цитировавшейся книге «***Конфликты детской души***» К. Г. Юнг, от его *собственной воспитанности и нравственности*.

Вернемся к мировоззрению как отражению мира, интеллектуальному и эмоционально-ценностному отношению человека к миру. Оно играет вполне определенную «*регулятивно-творческую роль, выступая в качестве методологии построения общей картины мира*»[1]. Таким образом, основная роль, которую может и должно сыграть преподавание математики, заключается в том, чтобы дать учащимся *реальную картину* того, *какое место занимает математика в «построении общей картины мира»*. Особенно это важно в условиях математизации знаний и практики. Как писал много занимавшийся вопросами формирования научного мировоззрения в процессе обучения ученик А. Н. Колмогорова и сам математик-прикладник Б. В. Гнеденко, «*В связи с таким увеличением роли математики в жизни общества возникает необходимость на любых ступенях математического образования стремиться не только к изложению фактического материала, но и к изложению методологических моментов науки, в том числе связей математики с познанием окружающего нас мира и его закономерностей, возникновения и формирования понятий математики*» [12, с. 3], и, далее: «*Сейчас, когда математика стала орудием познания и практической деятельности, воспитание правильных методологических установок на занятиях по математике особенно важно. Пренебрежение этим также можно считать своего рода воспитанием, но воспитанием самым худшим, которое приносит не пользу, а вред*» [12, с. 5]; «*Математика имеет свои неповторимые возможности для формирования правильных взглядов на научное познание, для выявления глубоких связей, существующих между деятельностью и мыслью*» [12, с. 62]. Методология осуществления указанных связей — *конструирование математических моделей*. Остановимся на этом подробнее, следуя, в основном, работам [14],[15].

В 1925 г. А. Н. Уайтхед утверждал: «*...Математика сейчас превратилась в интеллектуальный анализ типов моделей*» [27, с. 333]. Методологическое и практическое значение современного этапа математизации знаний проясняет рассмотрение механизма приложений математики к практике. В его основе лежит «*построение, анализ и приложения математических моделей, практика математического эксперимента*» (Рыбников, [25, с. 37]). Схема приложения теории, в том числе и математической, к практике осталась традиционной: *реальная задача — теория*

[1] *Философский энциклопедический словарь*. — М.: Сов. энциклопедия, 1983 (статья «*Мировоззрение*», с. 375).

— *приложения*. Но по отношению к приложениям математики как в других науках, так и в общественной практике, содержание этой схемы существенно обогатилось. Это обусловливается развитием математических теорий и их приложений, стимулированным взаимовлиянием математики и практики (см. предыдущий подраздел). Основные составляющие современного содержания схемы приложений математики к практике характеризуются следующими взаимосвязанными моментами и тенденциями.

1. Существенно расширился и продолжает расширяться класс, совокупность реальных научных и практических задач, к которым применимы математические методы исследования.

2. Обогатились сами математические методы исследования реальных задач или, как принято сейчас говорить, *методы математического моделирования*.

3. Благодаря развитию математики, программирования для ЭВМ, электронно-вычислительных и технических (например, микропроцессорных) средств расширились возможности практических приложений математических моделей и экспериментов. Мы имеем в виду такие важные для современного материального производства и управления черты, как внедрение автоматизированных производств, АСУП, САПР, СУБД[1] и т. д.; основанные на применении компьютерной техники приложения математических моделей в экономике, планировании, строительстве и т. д.

В настоящее время нет единого как бы определения или же подхода к тому, что такое *математическая модель* — как в силу множественности типов математических моделей, так и по причине бурного развития самого метода математического моделирования. Чаще всего говорят о математических моделях — об их построении, исследовании — как об «*основном виде деятельности математиков*» (Рыбников, [25, с. 3]). В нашем анализе, имеющем конечной целью рассмотрение отражения методологических аспектов математики в школьном математическом образовании, целесообразно выделить два основных в настоящее время типа моделей:

— *аналитические модели*, получающиеся путем формализации реальных задач в рамках математических теорий (примерами таких моделей могут служить различные алгебраические задачи, дифференциальные уравнения, задачи оптимизации, — в общем, задачи, которые могут быть проанализированы средствами соответствующей математической теории);

— *вычислительные модели*, получающиеся путем такой формализации реальной задачи, которая позволяет придти к результатам и выводам после соответствующих вычислений, как правило, с использованием компьютеров; в этом случае часто формализация состоит, по существу, в

[1] Автоматизированные системы управления производством; системы автоматизированного проектирования; системы управления базами данных.

программировании (разработке программы) для компьютеров (при этом нередко созданию вычислительной модели предшествует первичное аналитическое моделирование).

Грубо говоря, создание аналитических моделей — это задача математиков, задача прикладной математики в традиционном смысле этого названия. Разработка вычислительных моделей — задача программистов, задача *программирования* — современной «индустриальной» отрасли математики («индустриальность» этой отрасли состоит хотя бы в том, что уже несколько десятилетий активно развивается автоматизация самого программирования для компьютеров, совершенствование алгоритмических языков и других облегчающих программирование средств).

Отчасти современные тенденции математизации нашли свое отражение в школьном образовании — введен предмет информатика (ИВТ), в курс алгебры и начал анализа вкраплены примеры, которые могут дать некоторое представление о методологии математики. Но, во-первых, курсы математики и ИВТ фактически никак не связаны между собой. Во-вторых, «методологические» примеры (по сути, анализ моделей) в основном курсе настолько фрагментарны (и не подкреплены методически), что было бы слишком смелым утверждение о мировоззренческой направленности соответствующих тем курса. Опять мы вынуждены констатировать, что удовлетворительное разрешение данной проблемы возможно лишь в случае специальных усилий, в рамках углубленного математического образования. Достигается эта *цель — реальное, содержательное* ***способствование формированию научного мировоззрения*** *в процессе углубленного обучения математике* — опять же путем адекватного определения содержания курсов, а также установлением конкретного и реального взаимодействия между курсами математики и информатики.

П1.7. СОДЕРЖАНИЕ УГЛУБЛЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

(Принципы отбора содержания)

> ***Чему мы должны учить?*** *Вам, учителю, государство доверило обучение молодежи в вашем классе. Поэтому ваша задача — учить тому, что полезно как обществу, так и самим учащимся.*
>
> *Дьердь Пойа*

Исходя из вышеизложенных общих учебно-воспитательных целей углубленного математического образования, сформулируем и коротко обоснуем ряд основных дидактических и методических принципов, особенно актуальных при углубленном изучении математики — при определении содержания, структуры и методики преподавания соответствующих курсов.

Выделяемые ниже принципы рассматриваются нами как важнейшие рычаги воспитания и развития интереса учащихся к математике, как методы формирования сознания, мышления и научного мировоззрения в процессе углубленного математического образования. Эти принципы подробно раскрываются в работе [15].

1. Наука математика по своей природе есть наука абстрактная, поэтому и в соответствующем учебном предмете мы не сможем обойтись без математических, причем иерархических, многоступенчатых абстракций. Мы полагаем, что известное негативное влияние расширения абстрактно-дедуктивной базы в новом школьном курсе в основном вызвано тем, что программы, а вслед за ними и учебные пособия «забрались» на слишком высокие ступеньки иерархии математических абстракций. Выход подсказывается известной формулой Маркса о *восхождении от абстрактного к конкретному*, причем в случае математики здесь возникает специфическая ситуация: для каждой ступени абстракции предыдущая ступень уже будет конкретным (например, для абстракции «переменная» конкретным будет «число», которое само по себе есть абстракция (см. у Уайтхеда, [27, с. 86–90]). Итак, в преподавании абстрактных математических категорий важнейшим является следующий принцип:

(1) Конкретность *материала, используемого при изучении* **абстрактных** *математических понятий, конструкций и структур.*

Реализация этого принципа значительно способствовала бы решению задачи воспитания и развития интереса учащихся к математике.

Следующие четыре принципа направлены, в основном, на решение задачи формирования научного мировоззрения учащихся. Вместе с тем они допускают содержательную реализацию в методике преподавания соответствующих тем и вопросов углубленного курса.

2. Математика, как и другие науки, постоянно развивается, причем не обязательно непрерывно, но иногда и скачкообразно — примерами та-

ких революций в математике могут служить открытие в VI веке до н. э. иррациональных чисел или обнаружение на рубеже XIX–XX веков парадоксов интуитивной теории множеств. В любом разделе математики можно обнаружить реликты, в школьной же математике соседствуют понятия и концепции почти трех тысячелетий — от числа и теоремы Пифагора до линейного программирования и ЭВМ. Для формирования научного мировоззрения учащихся крайне важно показать диалектику развития науки математики. Более того, мы считаем полезным в некоторых случаях в преподнесении того или иного раздела следовать по тому пути, по которому перед этим проходила наука, — только мы тратим на путь не века, а часы. Оговоримся, что, несомненно, во многих случаях педагогически более целесообразным является привлечение в методику современной методологии математики, но полагаем, что такую методику нельзя возводить в ранг единственного методического принципа, как это, по сути, делается в существующих учебных пособиях. Итак, приходим к следующему принципу:

(2) *Сочетание современного методического и* **конкретно-исторического** *подходов при изучении математических теорий и их приложений.*

3. Модернизация школьного курса математики дала имеющие важное методологическое и воспитательное значение возможности продемонстрировать учащимся на значительно более широком, чем ранее, классе примеров прикладную роль математики, значение математических методов в изучении реальной действительности и в практике. Конечно, реализация этой возможности в значительной степени зависит от структуры и методики изучения предмета, от степени достижения **прикладной направленности** курса, заключающейся «*в осуществлении целенаправленной содержательной и методологической связи школьного курса математики с практикой*» (Фирсов, [29, с. 232]). Для углубленного математического образования особенно важна методологическая связь, ибо «*современный профессионализм есть обучение умов определенной методологии*» (Уайтхед, [27, с. 263]). При осуществлении такой связи важно учитывать и образовательный, и воспитательный аспекты, то есть построить систему преподавания таким образом, чтобы достаточно прочное овладение учащимися теоретическими знаниями и практическими умениями сочеталось с целенаправленным формированием у учащихся действительного понимания роли математики в познании объективной действительности, в практике, в системе всех научно-практических знаний, которые, в конечном счете, имеют общие цели — познания и преобразования реального мира. В рамках общеобразовательного курса математики эта достаточно сложная задача еще далека от своего решения, что, в первую очередь, объясняется общей перегруженностью курса. Однако в углубленном курсе такая задача может быть решена — например, путем реализации следующего принципа:

(3) *Демонстрация* **практических приложений** *математики, показ* **межпредметных целей** *развития науки.*

4. В философии среди связей математики с практикой выделяются опосредованные связи, то есть связи через посредство других наук (см. [1, с. 75-77]). С другой стороны, практика влияет на развитие математики тоже через посредство «более практических» наук. Таким образом, реализация прикладной направленности курса математики необходимо предполагает показ взаимосвязей математики с другими науками, причем не в статическом виде, а во взаимовлиянии и совокупном диалектическом развитии. Это приводит к следующему принципу:

(4) *Отражение в преподавании* **межнаучных связей** *— осуществление* **межпредметных связей** *в качестве методического средства.*

Последнее означает вовлечение в преподавание таких межнаучных связей, которые служили стимулами развития математики.

5. Математика, взятая вне своего исторического развития, представляет из себя совокупность очень разных и, подчас, разнородных теорий, концепций, идей, понятий и так далее. Даже в школьном курсе, начиная с VII класса, соседствуют «две математики» — геометрия и алгебра, а потом еще и начала анализа. Нередко в школе можно наблюдать такую картину: ученик А любит геометрию (вернее, имеет достаточно развитые «геометрические способности») и учится по ней на 5, но не любит алгебру и получает по ней тройки; ученик Б наоборот — учится по геометрии на 3, а по алгебре — на 5. Некоторое время эта ситуация не меняется. Но вот А и Б перешли в XI класс, и оба они, скорее всего, будут учиться на тройки по обоим предметам, так как алгебра и начала анализа в XI классе тесно связаны с геометрией. Во избежание подобных ситуаций в преподавании математики важно постоянно ориентироваться на следующий принцип:

(5) *Последовательная реализация* **внутриматематических связей**, *показ диалектического единства математики.*

Здесь идет речь именно о диалектическом единстве — о взаимопроникновении и взаимовлиянии различных разделов математики; вопрос же о едином курсе математики мы здесь не обсуждаем.

Последние три принципа направлены, главным образом, на решение задачи подготовки учащихся к продолжению образования, то есть, фактически, на формирование у учащихся глубоких и систематических знаний, прочных и сознательных умений и навыков в применении этих знаний.

6. Из всех общих дидактических принципов обучения в результате перехода на новое содержание школьного курса математики больше всего, на наш взгляд, пострадал принцип наглядности (конечно, если не учитывать принцип доступности), и причем, в основном, в преподавании начал математического анализа. После переработки учебных пособий положение несколько улучшилось, но оно будет соответствовать современному методическому уровню только тогда, когда в школьном преподавании

сложится хотя бы минимальная *традиция* использования наглядных образов (попросту говоря, графиков) на всех этапах изучения основных понятий анализа и их приложений. Лишь после этого мы будем вправе требовать от учащихся четкого формального и неформального представления об этих понятиях, действительного знания и понимания школьниками начал математического анализа. Разумеется, принцип наглядности в равной, если не большей, мере существен и для углубленных курсов. Сформулируем его так:

(6) *Использование* **наглядности** *как средства формирования, сознательного и устойчивого восприятия теоретических знаний.*

7. Еще одно последствие перехода на новое содержание обучения математике — низкий уровень умений и навыков выпускников в решении даже стандартных алгебраических задач — уравнений, неравенств, систем. В целях ликвидации этих пробелов и достижения оптимальной степени подготовленности учащихся к к вузовским вступительным экзаменам целесообразно руководствоваться следующим принципом:

(7) *Привлечение* **систематизации задач** *на основе их классификации в целях формирования устойчивых, систематических навыков в решении математических задач,* **обучение методам** *решения задач.*

По сути, этот принцип широко применяется в «системе репетиторства», однако он восходит к эвристике Пойа [22], [23] (и далее, к Декарту) и должен найти свое место не только при углубленном изучении математики.

8. Следующий, последний в нашем списке, принцип в дидактике, казалось бы, самоочевиден:

(8) Преемственность *в обучении,* **единство** *углубленного изучения математики с общеобразовательным курсом.*

Тем не менее, его приходится формулировать, ибо в традиции школ и классов с углубленным изучением математики, сложившейся еще до перехода на новые программы общеобразовательного курса, было, порой весьма значительное, отступление от основного курса, а нередко и обучение «старому по-новому» (то есть переучивание, нарушение преемственности). В настоящее время, в условиях относительной перегруженности основного курса, необходимо углубленно изучать именно основной курс, опираясь на уже имеющиеся знания учащихся (при необходимости прибегая к повторению).

Мы сформулировали ряд дидактических и методических принципов, которые должны быть положены в основу не только отбора содержания, но и определения структуры курсов математики при углубленном математическом образовании, и выбора методики их преподавания. Отметим, что еще один ряд дидактических и методических принципов мы здесь опускаем, подразумевая следование им само собой разумеющимся: это доступность, активность в обучении и т. д. Выделенные принципы **(1)**–**(8)** направлены на решение учебно-воспитательных задач сегодняшнего дня и ближайшего будущего, указанных в данном разделе — эти принципы, так сказать, наиболее злободневны.

Литература

[1] БЕЛЯЕВ Е.А., КИСЕЛЕВА Н.А., ПЕРМИНОВ В.Я. *Некоторые особенности развития математического знания.* — М.: Изд-во МГУ, 1975.

[2] БЛЯШКЕ В. *Греческая и наглядная геометрия:* Пер. с нем. — В сб. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, вып.2 — М.: Физматгиз, 1957; вып.3 — М.: Физматгиз, 1958.

[3] БОРХЕС Х. Л. *Проза разных лет: Сборник:* Пер. с исп. — М.: Радуга, 1984.

[4] БОРХЕС Х. Л. *Письмена Бога:* Пер. с исп. — М.: Республика, 1992.

[5] БУРБАКИ Н. *Очерки по истории математики:* Пер. с франц. — М.: ИЛ, 1963.

[6] ВЕЙЛЬ Г. *Симметрия:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1968.

[7] ВЕЙЛЬ Г. *Математическое мышление:* Пер. с англ. и нем. — М.: Наука, 1989.

[8] ВЕНТЦЕЛЬ Е. С. *Методологические особенности прикладной математики на современном этапе.* — В кн. МАТЕМАТИКИ О МАТЕМАТИКЕ: Сб. статей. М.: Знание, 1982, с. 37-55.

[9] ВИГНЕР Е. *Этюды о симметрии:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.

[10] ГАЛИЛЕЙ Г. *Пробирных дел мастер:* Пер. с лат. — М.: Наука, 1988.

[11] ГНЕДЕНКО Б. В. *Математика — народному хозяйству.* – М.: Знание, 1977.

[12] ГНЕДЕНКО Б. В. *Математика и научное познание.* – М.: Знание, 1983.

[13] ДЕКАРТ Р. *Рассуждение о методе: С приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия:* Пер. с франц. — Л.: Гостехиздат, 1953.

[14] ЗЕМЛЯКОВ А. Н., МОНАХОВ В. М. *Математизация знаний и теоретические основы построения современных математических факультативов.* — В кн. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПРОВЕДЕНИЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ / Под ред. В.М. Монахова и В.А. Орлова. М.: АПН СССР, 1983, с. 55-67.

[15] ЗЕМЛЯКОВ А. Н. *Методические основы углубленного изучения алгебры и начал анализа в выпускном классе:* Дисс. на соискание уч. степени канд. педагогических наук. — М.: 1983.

[16] КЕПЛЕР И. *О шестиугольных снежинках:* Пер. с лат. — М.: Наука, 1982.

[17] КУЗНЕЦОВ Б. Г. *История философии для физиков и математиков.* — М.: Наука, 1974.

[18] ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ на XIX международной конференции в Женеве. — В сб. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, вып.1, М.: Физматгиз, 1957.

[19] ПАЙТГЕН Г.-О., РИХТЕР П. Х. *Красота фракталов: Образы комплексных динамических систем:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1993.

[20] ПАСКАЛЬ Б. *Мысли:* Пер. с франц. — М.: Изд-во им. Сабашниковых, 1995.

[21] ПИДОУ Д. *Геометрия и искусство:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.

[22] ПОЙА Д. *Как решать задачу: Пособие для учителей:* Пер. с англ. — М.: Учпедгиз, 1961.

[23] ПОЙА Д. *Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание:* Пер. с англ. — М.: Наука, 1976.

[24] ПУАНКАРЕ А. *О науке:* Пер. с франц. — М.: Наука, 1990.

[25] РЫБНИКОВ К. А. *Очерки методологии математики.* — М.: Знание, 1982.

[26] СТРОЙК Д. Я. *Краткий очерк истории математики:* Пер. с нем. — М.: Наука, 1984.

[27] УАЙТХЕД А. Н. *Избранные работы по философии:* Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1990.

[28] УЗОРЫ СИММЕТРИИ. / *Под ред. М. Сенешаль и Дж. Флека:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.

[29] ФИРСОВ В.В. *О прикладной ориентации курса математики.* — В кн. УГЛУБЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА: Из опыта работы: Пособие для учителей/ Сост. С.И. Шварцбурд, О.А. Боковнев. М.: Просвещение, 1977, с. 215-239.

[30] ФОМЕНКО А. Т. *Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире.* — М.: Изд-во МГУ, 1992.

[31] ЦЕЙТЕН Г. Г. *История математики в XVI и XVII веках:* Пер. с нем. – М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[32] ЮНГ К.Г. *Собрание сочинений: Конфликты детской души:* Пер. с нем. — М.: Канон, 1994.